

3 Referenční plochy a soustavy

3.1 Referenční koule a výpočty na referenční kouli

Pro realizaci geodetických a kartografických výpočtů s nižší přesností je možné zemské těleso nebo jeho část nahradit kulovou plochou (tzv. referenční koulí). Narozdíl od elipsoidické plochy, viz kap. 3.2, má plocha kulová o poloměru R konstantní křivost, všechny její normály se protínají v jejím středu. Normálové roviny procházejí také středem koule a protínají ji v hlavních kružnicích o poloměru R . Oblouky hlavních kružnic (ortodrom), které spojují 3 body na kouli, které ovšem neleží na společné hlavní kružnici (její rovina prochází středem koule), tvoří sférický trojúhelník. Roviny, které neprocházejí středem koule, protínají ji ve vedlejších kružnicích.

3.1.1 Sférické zeměpisné souřadnice $[U, V]$

Souřadnicový systém sférických zeměpisných souřadnic tvoří jednotný systém pro celou kouli, viz obr. 3.1.1.

Sférická zeměpisná šířka U je úhel, který svírá normála n bodu P s rovinou rovníku. Je

- od rovníku k severnímu pólu v intervalu 0° až 90° a označuje se jako severní šířka (kladná, +, N)
- od rovníku k jižnímu pólu v intervalu od 0° do -90° a označuje se jako jižní šířka (záporná, -, S)

Rovnoběžka je geometrické místo bodů s konstantní zeměpisnou šířkou. Poloměr r libovolné rovnoběžky je dán vztahem $r = R \cos U$. Rovnoběžky nejsou obecně hlavní kružnice, ale vedlejší, a netvoří strany sférického trojúhelníka.

Sférická zeměpisná délka V je úhel, který svírá rovina místního poledníku (procházející bodem P) s rovinou základního (nultého $V = 0^\circ$) poledníku. Počítá se

- na východ od nultého poledníku v intervalu 0° až 180° a označuje se jako východní délka (kladná, +, E)
- na západ od nultého poledníku v intervalu 0° až -180° a označuje se jako západní délka (záporná, -, W)

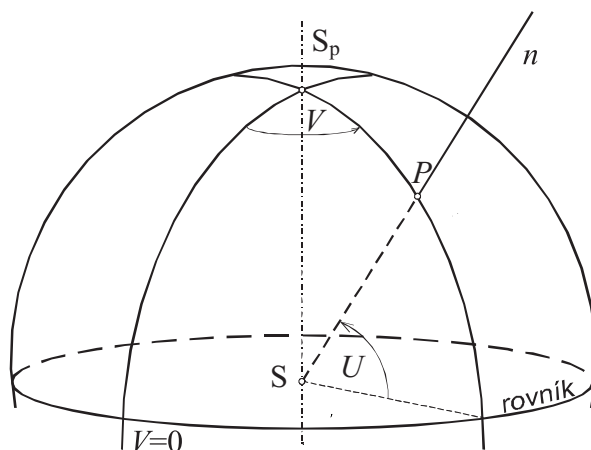
Poledník (meridián) je geometrické místo bodů s konstantní zeměpisnou délkou.

Póly jsou singulárními body, jejich zeměpisná délka je v rozsahu 0° až 180° a 0° až -180° .

Učebnice vyšší geodézie tradičně dále uvádějí pravoúhlé (Soldnerovy) souřadnice, jejich převody na souřadnice $[U, V]$ a naopak. Bližší viz např. [1], [2] nebo [3].

3.1.2 Geodetická křivka. Geodetická křivost. Ortodroma a loxodroma na kouli

Geodetická křivka bývá definována různými způsoby. Nejčastěji se užívá definice: „Geodetická křivka (čára) je nejkratší ze všech čar, které je možno na zvolené ploše vést mezi dvěma body.“ V rovině je geodetickou křivkou úsečka, na kouli oblouk hlavní kružnice (jejíž rovina prochází středem koule), na válcové ploše to je šroubovice. Sestrojíme ji, jestliže rozvineme válcovou plochu do roviny, oba dané body spojíme přímkou a plochu opět svineme do válce. Další viz kap. 3.2.



Obr. 3.1.0.1

Geodetická křivost je křivost průmětu infinitesimálně malého délkového elementu křivky do tečné roviny. V případě geodetické křivky je geodetická křivost v kterémkoliv jejím bodě nulová.

Ortodroma na kouli. Mějme rovinu, která prochází středem koule. Potom tuto kouli protíná v tzv. hlavní kružnici. Část/oblouk této kružnice spojující např. 2 body A a B na povrchu koule se nazývá ortodroma. Je to nejkratší spojnice těchto dvou bodů. Ortodroma je rovněž celá kružnice, jdoucí od bodu A do téhož bodu A. Ortodroma je geodetická křivka v prostoru zakřivená, avšak geodeticky přímá. V terénu ji lze vytyčit jako polygon o vrcholových úhlech 180° . Přímou by se jevila např. z letadla. Ortodromě odpovídá v rovině úsečka a přímka. Na kouli nemůžeme vést dvě rovnoběžné ortodromy, vždy jsou různoběžné, dvakrát se protínají a tvoří dva sférické dvojúhelníky. Délka celé ortodromy je $2\pi R$, kde R je poloměr koule. Průběh ortodromy na kouli je dán kružnicí a řídí se vzorcí sférické trigonometrie. Průběh analogické křivky v rovině je úsečka nebo přímka a řídí se vzorcí rovinné trigonometrie.

PŘÍKLAD 1

Obecně položená ortodroma o je znázorněna na obr. 3.1.2.

Je dáno:

Poloměr R koule: 1

Sférická šířka U_0 výchozího bodu P_0 na kouli: 30°

Sférická délka V_0 výchozího bodu P_0 na kouli: 0°

Azimut A_0 na výchozím bodě P_0 na kouli: 45°

Rozdíl sférických délek ΔV mezi body P a P_0 : 20°

Máme určit:

Sférickou šířku U obecného bodu P

Sférickou délku V obecného bodu P

Azimut A na bodě P

Délku $P_0P = l/R$

Výpočet:

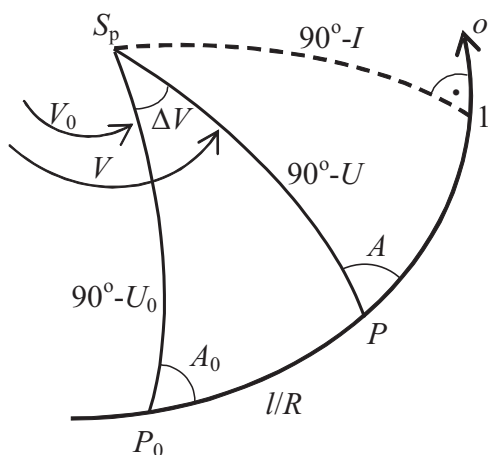
Podle vět sférické trigonometrie dostaneme

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A_0 \cos \Delta V + \sin A_0 \sin \Delta V \cos(90^\circ - U_0) \rightarrow A \text{ na bodě } P: 57,0750074^\circ$$

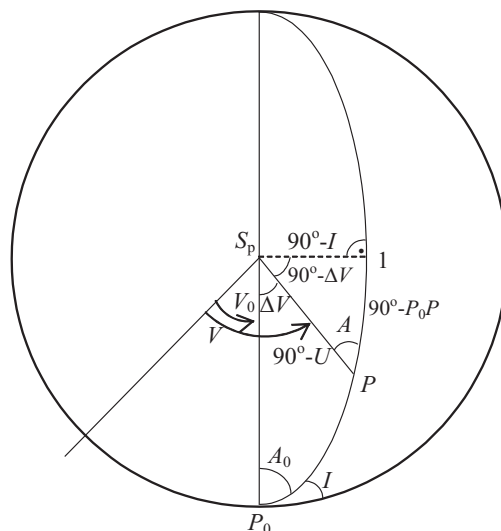
$$\sin(180^\circ - A)\sin(90^\circ - U) = \sin A_0 \sin(90^\circ - U_0) \rightarrow U \text{ bodu } P: 43,15125018^\circ$$

$$\cos \overline{P_0P} = \cos \frac{l}{R} = \cos(90^\circ - U_0)\cos(90^\circ - U) + \sin(90^\circ - U_0)\sin(90^\circ - U)\cos \Delta V \rightarrow$$

$$\rightarrow P_0P = 20^\circ,66333046$$



Obr. 3.1.0.1



Obr. 0.2.1.3

Dále $V = V_0 + \Delta V = 20^\circ$, event. kontrolně dalšími větami sférické trigonometrie. Délka $l = P_0P \cdot R \cdot \pi/180 = 0,360643151$.

Odvození Clairautovy věty. Rovina ortodromy je v poloze neměnná. Její sklon označíme I a je rovněž neměnný, obr. 3.1.3. Tudíž i vzdálenost $90^\circ - I$ nejvyššího bodu ortodromy od severního pólu S_p je neměnná, viz obr. 3.1.2 a 3.1.3. Z pravoúhlého sférického trojúhelníka $\Delta P1S_p$ platí jednoduchá věta sinová $\sin(90^\circ - U)\sin A = \sin(90^\circ - I)\sin 90^\circ$ a po vynásobení poloměrem R koule platí

$$R \cos U \sin A = konst. = k_0 \quad (3.1.1)$$

což je věta Clairautova. Platí nejen pro kouli, ale i pro rotační elipsoid.

PŘÍKLAD 2

Průběh ortodromy. Vycházíme z obr. 3.1.3.

Nechť je dáno:

Poloměr R koule: 1

Sférická šířka U_0 výchozího bodu P_0 na kouli: 0°

Sférická délka V_0 výchozího bodu P_0 na kouli: 0°

Rozdíl sférických délek ΔV mezi body P a P_0 : 10°

Sklon l roviny ortodromy: 60°

Máme určit:

Sférickou šířku U obecného bodu P

Sférickou délku V obecného bodu P

Azimut A na bodě P

Délku $P_0P = l/R$

Výpočet:

Nejprve z rov. (3.1.1): $k_0 = R \cos U \sin A = R \cos U_0 \sin A_0 = R \sin A_0 = R \cos I = 0,5$

Poté $V = V_0 + \Delta V$ v obecném bodě P : 10°

Z trojúhelníku $P1S_p$: $\cos A = \cos \Delta V \sin I$. Azimut A v obecném bodě P : $31^\circ,47494888$

$\cos U = k_0 / R \sin A$: $U = 16^\circ,73957747$

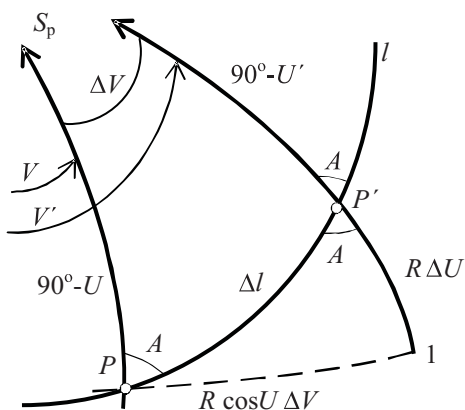
$\cos P_0P = \cos U \cos \Delta V$, takže délka $l = P_0P \cdot R \cdot \pi/180 = 0,33903719$.

Vhodné je sestavení kontrolních vzorců nebo i jiných postupů.

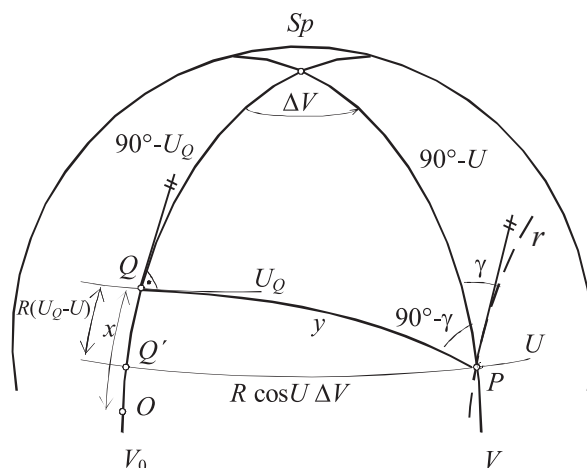
Loxodroma na kouli protíná všechny poledníky pod stejným azimutem A . Jestliže $A = 0^\circ$, je loxodromou poledník, jestliže $A = 90^\circ$, je loxodromou rovnoběžka. V obecném případě, kdy $A \neq 0^\circ \wedge A \neq 90^\circ$, se loxodroma blíží v závitech k severnímu a jižnímu pólu. Přestože je těchto závitů nekonečně mnoho, je délka loxodromy konečná, jak uvidíme později. S ohledem na ortodromu, která spojuje tytéž dva body jako loxodroma, prochází loxodroma na severní (jižní) zemské polokouli jižně (severně) od ortodromy. Loxodroma a ani diferenciálně malé úseky této křivky neleží na hlavní kružnici. Pro odvození dalších jejích vlastností je proto nutné vycházet z diferenciálního okolí obecného bodu P' , viz obr. 3.1.4, na kterém l označuje právě loxodromu, S_p je severní pól a význam ostatních symbolů je zřejmý z předchozího textu.

Protože se jedná o infinitesimálně malý trojúhelník $P1P'$, je možno jej považovat za rovinný. Pak platí vztahy

$$\sin A dl = R \cos U dV \quad \cos A dl = R dU \quad \tan A dU = \cos U dV, \quad (3.1.2)$$



Obr. 3.1.0.3



Obr. 3.1.0.4

ve kterých jsme difference Δ změnili na diferenciály d . Připomeňme, že A a R jsou konstanty. Ostatní veličiny, tj. U , V a l jsou proměnné a tedy podléhají integraci. Z druhé rov. (3.1.2) dostaneme ihned jednoduchý vztah

$$l \cos A = R(U' - U) \quad (3.1.3)$$

pro výpočet délky l loxodromy mezi koncovými body o zeměpisných šířkách U' a U . Bude-li ležet bod P na rovníku a P' na severním pólu, pak $U = 0^\circ$, $U' = 90^\circ$ a $l = \pi R / 2 \cos A$, vyjádřeno již v míře obloukové. Je to tedy délka loxodromy od rovníku k severnímu pólu S_p . Délka loxodromy od jižního k severnímu pólu je tedy $l = \pi R / \cos A$. Je-li azimut $A = 60^\circ$, je délka loxodromy mezi póly $l = 2\pi R$, což je 2x více, než délka poledníku mezi oběma póly. Ve zvláštních případech je $A = 0^\circ$ (poledník) a $A = 90^\circ$ (rovnoběžka). Pro $A = 0^\circ$ je délka mezi póly $l = 2\pi R$ a pro $A = 90^\circ$, viz první rov. (3.1.2), v níž $U = \text{konst.}$, je $l = 2\pi R \cos U$.

Integrujme nyní třetí rov. (3.1.2). Postupně dostáváme, viz též obr. 3.1.4,

$$\begin{aligned} \int_V^{V'} dV &= V' - V = \tan A \int_U^{U'} \frac{dU}{\cos U} = \tan A \int_U^{U'} [\sin(90^\circ + U)]^{-1} dU = \\ &= \tan A \int_U^{U'} \left[2 \sin\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right) \cos\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right) \right]^{-1} dU = \tan A \ln \frac{\tan\left(\frac{U'}{2} + 45^\circ\right)}{\tan\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right)}, \end{aligned}$$

takže výraz

$$V' = V - \tan A \cdot \ln \frac{\tan\left(\frac{U'}{2} + 45^\circ\right)}{\tan\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right)} \quad (3.1.4)$$

je použitelný pro výpočet V' , je-li dáno U' obecného bodu P' na loxodromě. Pro opačný případ platí

$$\ln \tan\left(\frac{U'}{2} + 45^\circ\right) = (V - V') \cot A + \ln \tan\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right),$$

$$\ln \tan\left(\frac{U'}{2} + 45^\circ\right) = V' \cot A - V \cot A + \ln \tan\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right) = V' \cot A + \psi$$

kde $\psi = -V \cot A + \ln \tan\left(\frac{U}{2} + 45^\circ\right)$ je konstanta pro danou loxodromu. Z předešlého vyplývá výraz

$$U' = 2 \arctan \left[\exp(V' \cot A + \psi) \right] - 90^\circ \quad (3.1.5)$$

použitelný pro případ výpočtu U' , je-li dáno V' bodu P' na loxodromě. Tím jsou v obou případech známy souřadnice U' , V' , viz rov. (3.1.4) a (3.1.5), je-li loxodroma určena vstupními veličinami U , V , A . Její délku l v obecném případě, tj. od bodu P k bodu P' , viz obr. 3.1.4, určuje rov. (3.1.3).

Rov. (3.1.4) a (3.1.5) se zjednoduší pro případy zvláštní. Tak pro azimut $A = 0^\circ$, tj. pro loxodromu jako poledník, nabývají souřadnice hodnot $U' \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, $V' = V$ a pro $A = 90^\circ$, tj. pro loxodromu jako rovnoběžku, nabývají souřadnice hodnot $U' = U$, $V' \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$.

Integrace první rovnice (3.1.2) by vyžadovala nejprve nahrazení veličiny U veličinami V a l . Poté by následovala její integrace. Nebude jí však třeba.

PŘÍKLAD 3

Průběh loxodromy. Viz obr. 3.1.4.

Jsou dány:

Zeměpisná šířka $U = 0^\circ$ a zeměpisná délka $V = 0^\circ$ výchozího bodu P loxodromy

Azimut $A = 45^\circ$ loxodromy na bodě P

Poloměr koule $R = 10$

Zeměpisné délky V' se budou měnit tak, jak ukazuje 1. řádek tab.3.1.1

Máme určit:

Zeměpisné šířky U' odpovídající V' loxodromy a délku $l = PP'$ loxodromy

Výpočet:

Nejprve určíme $\psi = -V \cot A + \ln \tan(U/2 + 45^\circ) = 0$, což je konstanta pro danou loxodromu.

Poté z rovnice (3.1.5) určíme šířku $U' = 2 \arctan \left[\exp(V' \cot A + \psi) \right] - 90^\circ = 2 \arctan \left[e^{V'} \right] - 90^\circ$,

kde jednotlivá V' udává 1. řádek a vypočtená U' 2. řádek tab. 3.1.1. Délku l určuje rovnice (3.1.3)

$l = R(U' - U) / \cos A = 10(U' - 0) \cos 45^\circ \cdot \pi / 180^\circ = 0,24682683 U'^\circ$. Výsledky uvádí 3. řádek tab. 3.1.1.

Tab. 3.1.1 Souřadnice a délka loxodromy

$V' [^\circ]$	30	60	90	120	150	180	270	360	720	7200
$U' [^\circ]$	28,72	51,33	66,51	75,96	81,66	85,05	88,97	89,79	89,9996	90
l	7,089	12,670	16,416	18,749	20,156	20,993	21,960	22,163	22,214316	22,214415

Z tab. 3.1.1 vyplývá, že loxodroma se blíží k pólům v závitech, jejichž počet je neomezený, její délka l je však určitá a blíží se k poslední hodnotě v posledním řádku.

3.1.3 Exces

Sférický exces ε ve sférickém trojúhelníku je hodnota, o kterou je součet vnitřních úhlů ve sférickém trojúhelníku větší než 180° . Obecně je to nadbytek součtu vnitřních úhlů sférického obrazce nad součtem úhlů příslušného rovinného obrazce. Velikost excesu lze vypočítat pomocí měřených úhlů α, β, γ podle rovnice

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ. \quad (3.1.6)$$

Chyby úhlových měření však mohou být větší než hodnota sférického excesu. V tom případě se rovnice (3.1.6) používá jako kontrolní a výpočet excesu se provede podle vztahu

$$\varepsilon'' = \rho'' \frac{P}{R^2}, \quad (3.1.7)$$

kde P je obsah sférického trojúhelníka, R poloměr koule a ρ'' je radián ve vteřinách.

Sférický exces ε ve sférickém mnohoúhelníku je opět řešitelný rovnicí (3.1.7), kde P je ovšem plocha sférického mnohoúhelníka.

3.1.4 Meridiánová konvergence

Meridiánová konvergence (sbíhavost poledníků) je dána úhlem γ , viz obr. 3.1.5, který svírá v bodě P poledník o zeměpisné délce ΔV s rovnoběžkou r . Tečna, vedená v bodě P k rovnoběžce r je rovnoběžná s tečnou k základnímu poledníku v patě Q . Řešením pravoúhlého sférického trojúhelníka PQS_p s využitím Neperových pravidel lze získat vztah pro výpočet meridiánové konvergence. Zní

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin U \tan \Delta V. \quad (3.1.8)$$

3.1.5 Řešení sférických trojúhelníků větami sférické trigonometrie

3.1.5.1 Řešení 1. základní geodetické úlohy (ve sférických zeměpisných souřadnicích)

Na kouli o poloměru R je dán bod $P_1[U_1, V_1]$, délka ortodromy l mezi body P_1 a P_2 a její azimut A_1 v bodě P_1 . Počítají se souřadnice $[U_2, V_2]$ bodu P_2 a azimut A_2 v tomto bodě. Situace je naznačena na obr. 3.1.6, zadané veličiny jsou zvýrazněny podtržením.

Pro výpočet zeměpisné šířky U_2 užitíme kosinovou větu ve sférickém trojúhelníku $P_1P_2S_p$. Má tvar $\cos(90^\circ - U_2) = \cos(90^\circ - U_1) \cos \frac{l}{R} + \sin(90^\circ - U_1) \sin \frac{l}{R} \cos A_1$. Z řady dalších možných variant řešení výpočtu souřadnice V_2 a azimutu A_2 vybíráme tu variantu, která vychází pouze ze zadaných veličin. Ve sférickém trojúhelníku $P_1P_2S_p$ platí sinová věta

$$\sin(90^\circ - U_2) \sin \Delta V = \sin \frac{l}{R} \cdot \sin A_1 \quad (3.1.9)$$

a sinuskosinová věta pro stranu a úhel

$$\sin(90^\circ - U_2) \cos \Delta V = \sin(90^\circ - U_1) \cos \frac{l}{R} - \sin \frac{l}{R} \cos(90^\circ - U_1) \cos A_1 \quad (3.1.10)$$

Vydělením rov. (3.1.9) a (3.1.10) a dalšími algebraickými úpravami dostaneme rovnici

$$\tan \Delta V = \frac{\sin \frac{l}{R} \sin A_1}{\cos U_1 \cos \frac{l}{R} - \sin \frac{l}{R} \sin U_1 \cos A_1}.$$

Vykrácením čitatele i jmenovatele výrazem $\sin(l/R)$ získáme tvar

$$\tan \Delta V = \frac{\sin A_1}{\cos U_1 \cot \frac{l}{R} - \sin U_1 \cos A_1},$$

který je funkcí pouze zadaných veličin. Obdobný způsob výpočtu lze použít pro azimut A_2 . Ve sférickém trojúhelníku $P_1P_2S_p$ se vyskytuje u bodu P_2 úhel $(180^\circ - A'_2)$, kde $A'_2 = A_2 - 180^\circ$. Pro výpočet A'_2 opět využijeme sinovou a sinuskosinovou větu pro stranu a úhel. Jsou

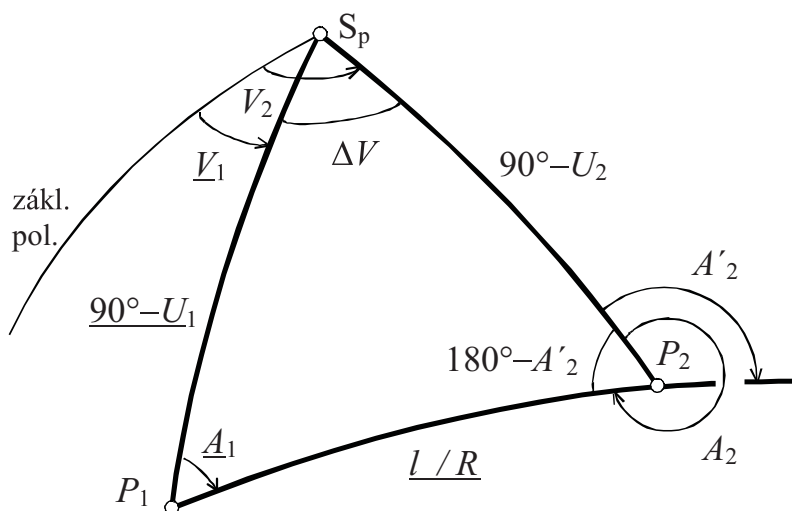
$$\sin(90^\circ - U_2) \sin(180^\circ - A'_2) = \sin(90^\circ - U_1) \cdot \sin A_1 \quad (3.1.11)$$

$$\sin(90^\circ - U_2) \cos(180^\circ - A'_2) = \cos(90^\circ - U_1) \sin \frac{l}{R} - \sin(90^\circ - U_1) \cos \frac{l}{R} \cos A_1 \quad (3.1.12)$$

Vydělením rov. (3.1.11) a (3.1.12) a vykrácením výrazem $\cos U_1$ obdržíme

$$\tan A'_2 = \frac{\sin A_1}{-\tan U_1 \sin \frac{l}{R} + \cos \frac{l}{R} \cos A_1}.$$

Hledaný úhel A_2 je pak $A_2 = A'_2 + 180^\circ$, viz obr. 3.1.6.



Obr. 3.1.0.1

PŘÍKLAD 4

1. základní geodetická úloha. Vycházíme z obr. 3.1.6.

Jsou dány:

- Poloměr R koule: 6378000 m
- Sférická šířka U_1 bodu P_1 na kouli: $50^\circ 40'$
- Sférická délka V_1 bodu P_1 na kouli: $14^\circ 25'$
- Délka l ortodromy mezi body P_1 a P_2 : 600000 m
- Azimut A_1 v bodě P_1 : 80°

Máme určit:

- Sférická šířka U_2 bodu P_2 na kouli
- Sférická délka V_2 bodu P_2 na kouli
- Azimut A_2 na bodě P_2

Výpočet:

Nejprve určíme úhel l/R odpovídající délce l ortodromy. Je $l/R = 0,0940733772 \text{ rad} = 5^\circ,39000748$. Poté podle kap. 3.1.5 postupně zjišťujeme U_2 z kosinové věty pro stranu, ΔV ze sinové věty, $V_2 = V_1 + \Delta V$, A'_2 např. ze sinové věty a $A_2 = A'_2 + 180^\circ$.

Výsledek:

$$U_2 = 51^\circ,29633124 \quad V_2 = 22^\circ,92440003 \quad A_2 = 266^\circ,6149359$$

Kontrola Clairautovou větou:

$$R \cos U_1 \sin A_1 = 3981158,129 \text{ m} \quad R \cos U_2 \sin A'_2 = 3981158,128 \text{ m}$$

Viz též obr. 3.1.6.

3.1.5.2 Řešení 2. základní geodetické úlohy (ve sférických zeměpisných souřadnicích)

Na kouli o poloměru R jsou dány body $P_1[U_1, V_1]$ a $P_2[U_2, V_2]$. Počítá se délka ortodromy l mezi body P_1 a P_2 a oba její azimuty A_1, A_2 v těchto bodech. Situace je naznačena na obr. 3.1.7, kde jsou podtrženy zadané veličiny.

Pro výpočet délky ortodromy l užitíme kosinovou větu ve sférickém trojúhelníku $P_1P_2S_p$. Je

$$\cos \frac{l}{R} = \cos(90^\circ - U_1) \cos(90^\circ - U_2) + \sin(90^\circ - U_1) \sin(90^\circ - U_2) \cos \Delta V,$$

kde $\Delta V = V_2 - V_1$, neboli

$$\cos \frac{l}{R} = \sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \Delta V.$$

Pro výpočet azimutu A_1 použijeme princip výpočtu uvedený v kap. 3.1.5.1. Ve sférickém trojúhelníku $P_1P_2S_p$ platí sinová věta

$$\sin \frac{l}{R} \sin A_1 = \sin(90^\circ - U_2) \cdot \sin \Delta V \quad (3.1.13)$$

a sinuskosinová věta pro stranu a úhel

$$\sin \frac{l}{R} \cos A_1 = \sin(90^\circ - U_1) \cos(90^\circ - U_2) - \sin(90^\circ - U_2) \cos(90^\circ - U_1) \cos \Delta V \quad (3.1.14)$$

Vydělením rov. (3.1.13) a (3.1.14) a dalšími algebraickými úpravami dostaneme rovnici

$$\tan A_1 = \frac{\cos U_2 \sin \Delta V}{\cos U_1 \sin U_2 - \cos U_2 \sin U_1 \cos \Delta V}.$$

Vykrácením výrazem $\cos U_2$ obdržíme rovnici

$$\tan A_1 = \frac{\sin \Delta V}{\cos U_1 \tan U_2 - \sin U_1 \cos \Delta V}.$$

Pro azimut A_2 je zapotřebí nejprve vypočítat A'_2 , a to vydělením následující sinové a sinuskosinové věty pro stranu a úhel

$$\sin \frac{l}{R} \sin(180^\circ - A'_2) = \sin(90^\circ - U_1) \cdot \sin \Delta V$$

$$\sin \frac{l}{R} \cos(180^\circ - A'_2) = \sin(90^\circ - U_2) \cos(90^\circ - U_1) - \sin(90^\circ - U_1) \cos(90^\circ - U_2) \cos \Delta V$$

Získáme rovnici

$$\tan(180^\circ - A'_2) = \frac{\cos U_1 \sin \Delta V}{\cos U_2 \sin U_1 - \cos U_1 \sin U_2 \cos \Delta V},$$

která vykrácením výrazem $\cos U_1$ přejde na tvar

$$\tan A'_2 = \frac{\sin \Delta V}{-\cos U_2 \tan U_1 + \sin U_2 \cos \Delta V}.$$

Azimut A_2 vypočteme z výrazu $A_2 = 180^\circ + A'_2$.

PŘÍKLAD 5

2. základní geodetická úloha. Vycházíme z obr. 3.1.7. Je použito výsledných hodnot PŘÍKLADU 4.

Je dáno:

Poloměr R koule: 6378000 m

Sférická šířka U_1 bodu P_1 na kouli: $50^\circ 40'$

Sférická délka V_1 bodu P_1 na kouli: $14^\circ 25'$

Sférická šířka U_2 bodu P_2 na kouli: $51^\circ 17'46''$, 792464

Sférická délka V_2 bodu P_2 na kouli: $22^\circ 55'27''$, 840108

Máme určit:

Azimut A_1 v bodě P_1 na kouli

Azimut A_2 v bodě P_2 na kouli

Délku l ortodromy mezi body P_1 a P_2

Výpočet:

Podle prvních vzorců v této kap. 3.1.5.2 určíme úhlovou hodnotu l / R ortodromy, kde $\Delta V = V_2 - V_1 = 8^\circ 30'27''$, 840108. Je $l / R = 0,094073377$ rad = $5^\circ,39000747$ a $l = (l / R) R$.

Poté podle dalších vzorců kap. 3.1.5.2 určíme azimuty A_1 , A_2 a konečně $A_2 = A'_2 + 180^\circ$.

Výsledek:

$A_1 = 79^\circ,99999997$ $A_2 = 266^\circ,61493589$ $l = 599999,998$ m,
což je ve shodě s PŘÍKLADEM 4. Další kontroly jsou zbytečné.

Pro zájemce o tuto disciplínu jsou uvedeny náměty dalších, složitějších příkladů na kouli:

- Určete sférické zeměpisné souřadnice průsečíků ortodromy i loxodromy s daným poledníkem, rovnoběžkou, obecnou hlavní i vedlejší kružnicí.
- Určete sférické zeměpisné souřadnice extrémních bodů na ortodromě.
- Určete sférické zeměpisné souřadnice průsečíků dvou ortodrom, dvou loxodrom, ortodromy s loxodromou.
- Vypočtete excesy, jsou-li dány sférické zeměpisné souřadnice minimálně tří bodů na kouli.
- Určete meridiánové konvergence pro různé souřadnicové soustavy a pro různé body různých obrazců.

Závěrečná poznámka ke kap. 3.1.5.

Dlužno poznamenat, že byly odvozeny i jiné metody, které však již patří minulosti. Byly odvozeny z důvodů snížení počtu desetinných míst při zachování přesnosti výpočtu. Délky trigonometrických stran nepřesahují zpravidla 30 km, takže země středné úhly jsou menší než $16'$ a excesy trojúhelníků menší než $2''$. Pro milimetrovou přesnost je nutno počítat trigonometrické funkce na 11 desetinných míst. Obecné vzorce sférické trigonometrie nebyly vhodné pro řešení takovýchto „malých“ trojúhelníků. Tyto okolnosti vedly k určité úpravě rovnic pro řešení sférických trojúhelníků. Tím se např. sférické řešení nahradí řešením rovinným. Uvedme aspoň některé názvy. Metoda excesová (Legendre 1787) a metoda aditamentová (Soldner 1820). Naše odborná literatura uvádí tyto metody a mnohé další např. v [1], [2] a [3].

Tyto „základní“ geodetické úlohy bývají též označovány jako „hlavní“ geodetické úlohy.

LITERATURA:

- [1] Böhm J., Hora L., Kolenatý E.: Vyšší geodézie – díl 1. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1979.
- [2] Ryšavý J.: Vyšší geodesie. Nákladem ČMT, Praha 1947.
- [3] Vykutíl J.: Vyšší geodézie. Vydavatelství Kartografie n. p., Praha 1982.

3.2 Referenční elipsoid a výpočty na referenčním elipsoidu

Pro přesnější geodetické výpočty již nevyhovuje nahrazení zemského tělesa plochou kulovou. Skutečný tvar Země lépe vystihuje plocha elipsoidická. Trojosý elipsoid má však složitější geometrii, proto se užívá *elipsoid rotační* pro určitou oblast (na rozdíl od elipsoidu obecného, který platí pro celou Zemi). Vznikne rotací poledníkové elipsy o hlavní ose a a vedlejší ose b . Parametry a , b je tvarově i rozměrově rotační elipsoid jednoznačně definován. Z nich jsou odvozeny další veličiny, které charakterizují tento elipsoid.

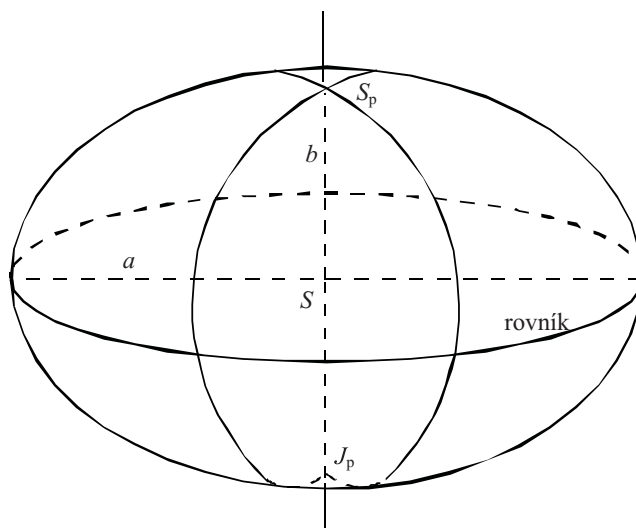
První výstřednost (excentricita poledníkové elipsy) $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

Druhá výstřednost $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

První zploštění (poledníkové elipsy) $i = \frac{a - b}{a}$

Druhé zploštění (poledníkové elipsy) $n = \frac{a - b}{a + b}$

Poloměr křivosti na pólech $c = \frac{a^2}{b}$



Obr. 3.2.1

Rovina, která prochází středem S elipsoidu a je kolmá na vedlejší osu b , je rovina geodetického^{*)} rovníku (viz obr. 3.2.2). Rovník je kružnice o poloměru a . Řezy rovin rovnoběžných s rovinou rovníku jsou geodetické rovnoběžky – kružnice, jejichž poloměr se zmenšuje od rovníku k pólům. Svazek rovin, procházejících vedlejší osou elipsoidu b , protíná povrch elipsoidu v geodetických polednících (meridiánech). Jsou to elipsy s poloosami a, b .

Plocha rotačního elipsoidu má proměnlivou křivost podle směru řezu i polohy. Normály k ploše obecně neprocházejí středem elipsoidu, ale jsou různoběžné s vedlejší osou.

3.2.1 Souřadnicové soustavy^{**)} a jejich transformace

Geodetická zeměpisná šířka B ^{*)}** je úhel, který svírá normála v bodě P k povrchu elipsoidu. Počítá se

- od rovníku k severnímu pólu v intervalu 0° až 90° a označuje se jako severní šířka (kladná, +, N)
- od rovníku k jižnímu pólu v intervalu od 0° do -90° a označuje se jako jižní šířka (záporná, –, S)

Geodetická zeměpisná délka L je úhel, který svírá rovina poledníku bodu P s rovinou nultého poledníku. Počítá se

- na východ od nultého poledníku v intervalu 0° až 180° a označuje se jako východní délka (kladná, +, E)
- na západ od nultého poledníku v intervalu 0° až -180° a označuje se jako západní délka (záporná, –, W)

Jako základní (nultý) poledník je mezinárodně označován poledník greenwichský. Tento základní geodetický poledník byl v minulosti definován jako astronomický poledník, který prochází stabilizovaným bodem na observatoři v Greenwichi u Londýna. Byl definován pomocí astronomických měření na této observatoři a proto byl též nazýván greenwichským. V současné době je to již jen historická setrvačnost v tomto názvu, neboť základní poledník je vlivem kolísání pólů s časem proměnný. V současnosti je permanentně zaměřován a vypočítáván Mezinárodní časovou službou v Paříži a neodpovídá původnímu poledníku (neprochází oním základním bodem v Greenwichi).

Do počátku 20. století se zeměpisné délky počítaly od poledníku procházejícím ostrovem Ferro (nejzápadnějším z Kanárských ostrovů, hranicí tehdejšími Evropany poznání světa). Poledník Ferro byl základním i pro naši Jednotnou trigonometrickou síť katastrální. Přibližný převodní vztah mezi oběma délkovými soustavami $L_{\text{FERRO}} = L_{\text{GR}} + 17^\circ 40'$ je velmi často uvádě. Hodnotu správnou, tj. $17^\circ 39' 46,02''$, cituje E. Buchar v práci Tížnicové odchylky a geoid v ČSR. Tato práce sice vyšla, ale do prodeje se nedostala, neboť byla prohlášena za tajnou.

Geocentrická šířka β . V astronomických aplikacích se místo B užívá geocentrická^{*)} šířka β . Je dána úhlem, který svírá spojnice SP s hlavní poloosou (viz obr. 3.2.3). Druhou souřadnicí zůstává L .

*) Všechny veličiny vztažené k takto definovanému elipsoidu jsou veličinami geodetickými.

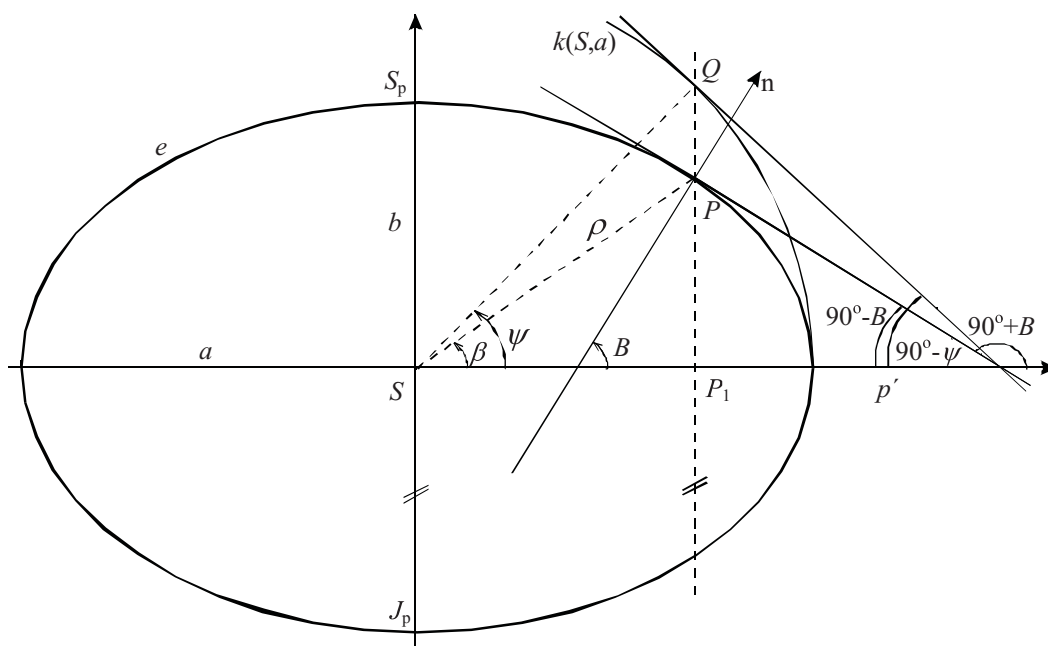
***) Termín zeměpisná šířka a délka se užívá od starověku. Původně se měřilo a mapovalo především v oblasti Středozemního moře a vynášení v mapě se konalo „po šířce“ nebo „po délce“ Středozemního moře. Z doby starověku pochází také měření souřadnic od rovníku, protože polární oblasti nebyly známé.

****) Označení B, L je z německého Breite (šířka) a Länge (délka). Souřadnice $[B, L]$ jsou geodetické, vztažené ke zvolenému elipsoidu. Souřadnice $[\varphi, \lambda]$ jsou astronomické souřadnice, které se měří na skutečném zemském tělese (jsou s časem proměnné vlivem poruch jako je kolísání pólů, změna směru svislice v prostoru atd.).

Redukovaná šířka ψ . Pro teoretické účely byla zavedena redukovaná šířka ψ . Uvažovaným bodem P (viz obr. 3.2.2) se vede rovnoběžka s osou y . Průsečíkem této rovnoběžky s osou x vznikne bod P_1 . Na kružnici o poloměru a se středem S se sestrojí bod Q jako $Q = k(S, a) \cap PP_1$, kde $PP_1 \parallel b$. Redukovaná šířka ψ je úhel QSP_1 . Druhou souřadnicí zůstává geocentrická délka L .

Pravouhlé souřadnice v rovině poledníkové elipsy $[x, y]$

Volíme-li počátek rovinné souřadnicové soustavy ve středu S meridiánové elipsy, osu x vložíme do hlavní poloosy a osu y do vedlejší poloosy meridiánové elipsy, bude její rovnice $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, nebo $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. Pravouhlé souřadnice bodu P jsou definovány $x = SP_1$, $y = PP_1$.



Obr. 3.2.1

Prostorové pravouhlé souřadnice $[X, Y, Z]$

Počátek souřadnicové soustavy je ve středu elipsoidu S . Osa X je průsečnicí geodetické roviny rovníku s rovinou základního geodetického poledníku, osa Y leží v rovině rovníku a je kolmá na osu X v pravotočivé soustavě. Osa Z je vložena do vedlejší osy. Osy X, Y, Z tvoří pravouhlou pravotočivou soustavu. Prostorové pravouhlé souřadnice bodu P , který leží na ploše elipsoidu ($H = 0$), jsou definovány vztahy

$$X = N \cos B \cos L, \quad Y = N \cos B \sin L, \quad Z = N(1 - e^2) \sin B \quad (3.2.1)$$

^{*)} Zde je geocentrickou šířkou míněn úhel, který má vrchol ve středu referenčního elipsoidu. V současné době se termín „geocentrický“ většinou užívá pro střed elipsoidu totožný s těžištěm Země. Elipsoid se středem v těžišti Země má název obecný (absolutní) elipsoid. Vzdálenosti středů referenčních elipsoidů od těžiště Země se pohybují řádově ve stovkách metrů.

kde N je příčný poloměr křivosti, viz rov. (3.2.9) a e je první výstřednost. Pro bod, který leží ve směru normály k elipsoidu ve výšce H nad elipsoidem, platí

$$X = (N + H) \cos B \cos L, \quad Y = (N + H) \cos B \sin L, \quad Z = (N(1 - e^2) + H) \sin B \quad (3.2.2)$$

Odvození viz při rov. (3.2.10) a (3.2.11).

3.2.1.1 Vybrané transformace souřadnic

$\beta \leftrightarrow \psi$

Následující úlohy budeme řešit za předpokladu znalosti velmi jednoduchého (afinního) vztahu mezi elipsou e a kružnicí $k(S, a)$, viz obr. 3.2.2. Zní

$$P_1P / P_1Q = b / a \quad (3.2.3)$$

pro všechny souřadnice ve směru osy y . Souřadnice ve směru osy x zůstávají neměnné. Z obr. 3.2.2 vyplývá, že

$$\tan \psi = P_1Q / x, \quad \tan \beta = y / x,$$

z čehož, viz též rov. (3.2.3),

$$\tan \psi / \tan \beta = P_1Q / y = P_1Q / P_1P = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{1-e^2}},$$

takže

$$\tan \psi = (1 - e^2)^{-0.5} \tan \beta, \quad \tan \beta = \sqrt{(1 - e^2)} \tan \psi \quad (3.2.4)$$

$\psi \leftrightarrow B$

Podle obr. 3.2.2 je $\tan(90^\circ - \psi) = P_1Q / p'$, $\tan(90^\circ - B) = P_1P / p'$, z čehož

$$\cotg \psi / \cotg B = \tan B / \tan \psi = \frac{P_1Q}{P_1P} = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{(1-e^2)}},$$

jak vyplývá z rov. (3.2.3). Takže

$$\tan B = \sqrt{1 - e^2} \tan \psi, \quad \tan \psi = \sqrt{(1 - e^2)} \tan B \quad (3.2.5)$$

$B \leftrightarrow \beta$

Zřejmě platí pomocí rov. (3.2.4) a (3.2.5), že

$$\tan \beta / \tan B = \frac{\tan \beta / \tan \psi}{\tan B / \tan \psi} = \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{(1 - e^2)^{-0.5}} = 1 - e^2,$$

$$\tan \beta = (1 - e^2) \tan B, \quad \tan B = (1 - e^2)^{-1} \tan \beta.$$

$B \leftrightarrow x, y$

Opět použijeme obr. 3.2.2. Vyplývá z něho, že

$$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi \quad (3.2.6)$$

Použijeme-li známých pouček z goniometrie, je možno $\cos \psi$ a $\sin \psi$ vyjádřit jako $\tan \psi$. Zní

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}}, \quad \sin \psi = \frac{\tan \psi}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} \quad (3.2.7)$$

Za $\tan \psi$ dosadíme z rov. (3.2.5) do předchozích rovnic, tyto do rov. (3.2.6) a postupně dostáváme, že

$$x = a \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \tan^2 B}}, \quad y = b \frac{\sqrt{(1 - e^2) \tan B}}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \tan^2 B}}$$

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{\cos^2 B + (1 - e^2) \sin^2 B}}, \quad y = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{\cos^2 B + (1 - e^2) \sin^2 B}} \quad (3.2.8)$$

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad y = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

kde $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ je tzv. druhá základní (fundamentální, hlavní) geodetická funkce. Pak je také možno psát

$$x = a \cos B / W, \quad y = a(1 - e^2) \sin B / W$$

Pro úplnost uvedme první základní (fundamentální, hlavní) geodetickou funkci $V = \sqrt{1 + e'^2 \sin^2 B}$. Vztahy mezi nimi jsou

$$W = V \sqrt{1 - e^2}, \quad V = W \sqrt{1 + e'^2}$$

Obě funkce se v geodézii často používají, především ve vyšší geodézii. Druhá základní geodetická funkce V se užívá s polárním poloměrem křivosti c . Obě funkce W a V závisí jen na geodetické šířce B a bývaly tabelovány k tomuto argumentu B . Důvodem pro jejich zavedení bylo počítařské zjednodušení. Dnes již toho není třeba.

S rov. (3.2.8) souvisí další důležitá veličina, a to je příčný poloměr křivosti

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a}{W} \quad (3.2.9)$$

což je poloměr oskulační kružnice v rovině rovnoběžky daného bodu, tzv. příčný poloměr křivosti. Odvození je v kap. 3.2.3.

Geocentrický průvodič, viz obr. 3.2.2, je

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = a \sqrt{\cos^2 \psi + (1 - e^2) \sin^2 \psi} = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}$$

S pomocí rov. (3.2.6) nebo též s pomocí rov. (3.2.8)

$$\rho = a\sqrt{\cos^2 B + (1-e^2)\sin^2 B} / W = a\sqrt{1+e^2(e^2-2)\sin^2 B} / W$$

a s pomocí první rov. (3.2.4) a druhé rov. (3.2.7) je

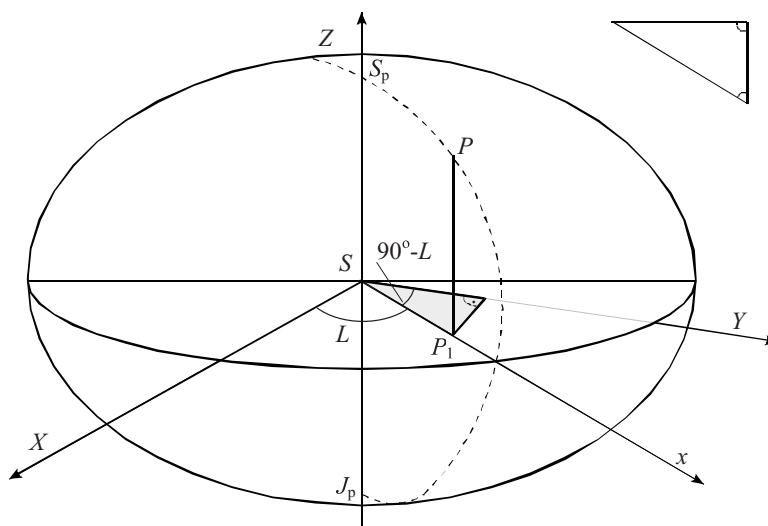
$$\rho = a\sqrt{1-e^2 \frac{\tan^2 \psi}{1+\tan^2 \psi}} = a\sqrt{1-e^2 \frac{\tan^2 \beta}{1-e^2+\tan^2 \beta}} = \frac{b}{\sqrt{\cos^2 \beta - e^2 \sin^2 \beta}}$$

Transformace v prostoru (3-D transformace)

a) $B, L, H=0 \rightarrow X, Y, Z$

Z obr. 3.2.3 a z trojúhelníku vpravo nahoře vyplývají pro souřadnice X, Y, Z vztahy $X = x \cos L$, $Y = x \sin L$, $Z = y$, které lze upravit dosažením vztahů (3.2.8) a (3.2.9). Dostáváme

$$X = N \cos B \cos L, \quad Y = N \cos B \sin L, \quad Z = N(1-e^2) \sin B \quad (3.2.10)$$



Obr. 3.2.1

b) $B, L, H \rightarrow X, Y, Z$

V rov. (3.2.10) příčný poloměr křivosti N se nahradí výrazem $(N+H)$, čímž se získají rovnice, viz též rov. (3.2.2),

$$X = (N+H) \cos B \cos L, \quad Y = (N+H) \cos B \sin L, \quad Z = (N(1-e^2)+H) \sin B \quad (3.2.11)$$

Elipsoidická výška H bodu P je rovna součtu jeho „normální“ výšky H_n a výšky ζ_{kv} kvazigeoidu nad elipsoidem, takže $H = H_n + \zeta_{kv}$.

c) $X, Y, Z \rightarrow B, L, H$

Zpětnou transformaci lze provést nepřímým i přímým způsobem.

a) Nepřímý způsob (postupná aproximace)

Geodetická délka L se vyjádří vydělením druhé a první rov. (3.2.11). Je $\operatorname{tg} L = Y / X$. Z týchž rovnic získáme

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = (N + H) \cos B = p, \quad (3.2.12)$$

kde p je hodnota známá. Touto hodnotou vydělíme třetí rov. (3.2.11) a máme

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{Z}{p} = \frac{(N + H - Ne^2) \sin B}{(N + H) \cos B} = \tan B - \frac{1}{1 + H/N} e^2 \tan B,$$

z čehož vyplývá pro geodetickou šířku B vztah

$$\tan B = \frac{Z}{p} + \frac{N}{p} e^2 \sin B = \frac{1}{p} (Z + Ne^2 \sin B), \quad (3.2.13)$$

který řešíme postupnou aproximací, neboť druhý člen pravé strany rov. (3.2.13) obsahuje malou veličinu e^2 . Neznámou je ovšem i příčný poloměr křivosti N , viz rov. (3.2.9), který se rovněž postupně upřesňuje společně s výrazem B . Takže postup bude $\tan B^I = Z / p$,

$$N^I = a(1 - e^2 \sin^2 B^I)^{-0.5}, \quad \tan B^{II} = \frac{1}{p} (Z + N^I e^2 \sin B^I) = \tan B^I + \frac{N^I}{p} e^2 \sin B^I,$$

$$N^{II} = a(1 - e^2 \sin^2 B^{II})^{-0.5}, \quad \tan B^{III} = \tan B^I + \frac{N^{II}}{p} e^2 \sin B^{II} \text{ atd.}$$

Zpravidla již třetí aproximace dává hledanou hodnotu B .

Elipsoidickou výšku H uvádí rov. (3.2.12).

b) Přímý způsob, viz [4]

Nejdříve se vypočítají konstanty k_1, k_2, k_3 , které jsou pro daný referenční elipsoid neměnné a stačí je tedy vypočítat jen jednou, $k_1 = \frac{a}{b}$, $k_2 = \frac{E^2}{a}$, $k_3 = \frac{E^2}{b}$, kde a, b viz úvod kap. 3.2 a

$E^2 = a^2 - b^2$. Zavedeme $\theta = \arctan \frac{k_1 Z}{p}$, pak

$$\tan B = \frac{Z + k_3 \sin^3 \theta}{p - k_2 \cos^3 \theta}, \quad \tan L = \frac{Y}{X}, \quad H = p \cos B + Z \sin B - a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \quad (3.2.14)$$

PŘÍKLAD 6

Transformace B, L, H na X, Y, Z

Jsou dány parametry Besselova elipsoidu a, e^2 a elipsoidické zeměpisné souřadnice B, L, H bodu P , který leží vně Besselova elipsoidu:

$a = 6377397,155$ m, $e^2 = 0,0066743722$, $B = 50^\circ$, $L = 15^\circ$, $H = 10$ m.

Určete pravouhlé prostorové souřadnice X, Y, Z bodu P .

Výpočet:

Použijeme jednoduše rov.(3.2.11). Dříve je však nutné vypočítat příčný poloměr křivosti N z rov. (3.2.9).

Výsledek:

$N = 6\,389\,923,082$ m, $X = 3\,967\,414,579$ m, $Y = 1\,063\,065,533$ m, $Z = 4\,862\,301,910$ m.

PŘÍKLAD 7

Transformace X, Y, Z na B, L, H .

a) Nepřímý způsob

Tuto úlohu budeme nejprve řešit postupnými aproximacemi, viz bod c) v předchozím textu. Dány jsou opět parametry Besselova elipsoidu a a e^2 a pravouhlé prostorové souřadnice X, Y, Z bodu P , viz výše.

Výpočet:

Geodetickou délku L určíme z výrazu $\tan L = Y/X$, který jsme získali z druhé a první rov. (3.2.11). Geodetickou šířku B určíme postupným přibližováním, viz rov.(3.2.13) a text za ní.

V jednotlivých aproximacích dostáváme ve $[^\circ]$: 49,810095874469, 49,999475608660, 49,999998548200, 49,99999995981 a 49,99999999989. Elipsoidickou výšku určuje rov.(3.2.12), která zní $H = p/\cos B - N$.

Výsledky:

$B = 50^\circ$, $L = 15^\circ$, $H = 10$ m, což se shoduje se zadanými veličinami v úvodu příkladu 6.

b) Přímý způsob, viz [4].

Dány jsou parametry Besselova elipsoidu a , e^2 a pravouhlé prostorové souřadnice X, Y, Z bodu P , který leží vně Besselova elipsoidu:

$a = 6377397,155$ m, $e^2 = 0,0066743722$

$X = 3967414,58$ m, $Y = 1063065,533$ m, $Z = 4862301,91$ m

Určete geodetické souřadnice B, L, H téhož bodu P , a to přímým postupem, viz bod b) v předchozím textu. Jde tedy o tutéž úlohu, řešenou bezprostředně před touto úlohou, leč nepřímým způsobem, tj. pomocí aproximací.

Výpočet:

Nejprve vypočteme vedlejší poloosu $b = a(1 - e^2)^{0,5} = 6\,356\,078,962\,919\,936$ m, poté pomocnou veličinu $E = (a^2 - b^2)^{0,5} = 521\,013,137\,769\,800\,8$ a dále

$k_1 = 1,003\,353\,984\,776\,531$, $k_2 = 42\,565,122\,279\,691\,77$ m, $k_3 = 42\,707,885\,051\,829\,05$ m,

$P = (X^2 + Y^2)^{0,5} = 4\,107\,369,812\,550\,259$ m a $\theta = 49^\circ,905\,506\,477\,093\,72$.

Výsledky:

Viz rov. (3.2.14): $B = 49^\circ,999\,999\,991\,6$, $L = 15^\circ,000\,000\,001\,644\,86$,

$H = 10,000\,364\,988$ m, což je zcela vyhovující.

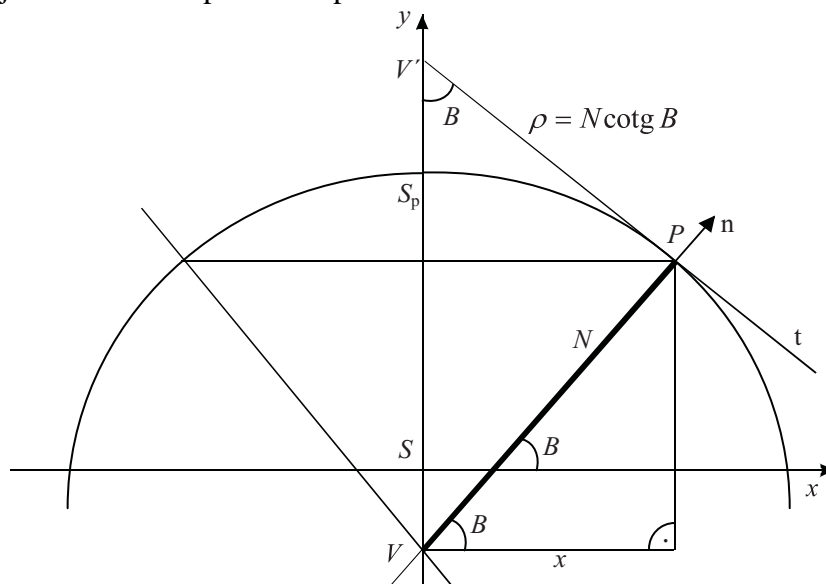
3.2.2 Křivky na rotačním elipsoidu

Zemský poledník je množina bodů s konstantní geodetickou zeměpisnou délkou. Má tvar elipsy, která spojuje severní a jižní pól. Na ploše elipsoidu je jich nekonečně mnoho. Výpočet délky poledníkového oblouku je v kap. 3.2.4.

Zemská rovnoběžka. Z obr. 3.2.4 vyplývá, že rovnoběžka, která prochází bodem P o geodetické šířce B , je kružnice o poloměru $r = x = N \cos B$.

Oblouk s_r rovnoběžky mezi body o geodetických délkách L_1, L_2 je tedy obloukem kružnice o poloměru r při středovém úhlu $\Delta L = L_2 - L_1$, takže $s_r = N \cos B \Delta L$, kde ΔL je v radiánech. Tečny k ploše elipsoidu, kolmé k oblouku rovnoběžky, jsou tečnami k poledníkům, směřují do bodu V' a tvoří kuželový plášť.

Normálové řezy. Mezi body $P_1[B_1, L_1]$ a $P_2[B_2, L_2]$ lze obecně vést dva normálové řezy (viz obr. 3.2.5). První normálový řez vytváří rovina daná normálou n_1 a bodem P_2 a druhý normálový řez normálou n_2 a bodem P_1 , přičemž normály n_1, n_2 jsou obecně mimoběžky. Normála n_1 v bodě P_1 protne rotační osu elipsoidu v bodě V_1 , normála n_2 v bodě V_2 . Rovina určená body $P_1V_1P_2$ obsahuje normálu n_1 a protíná elipsoid v normálovém řezu s_1 . Rovina $P_1V_2P_2$ obsahuje normálu n_2 a protíná elipsoid v normálovém řezu s_2 .



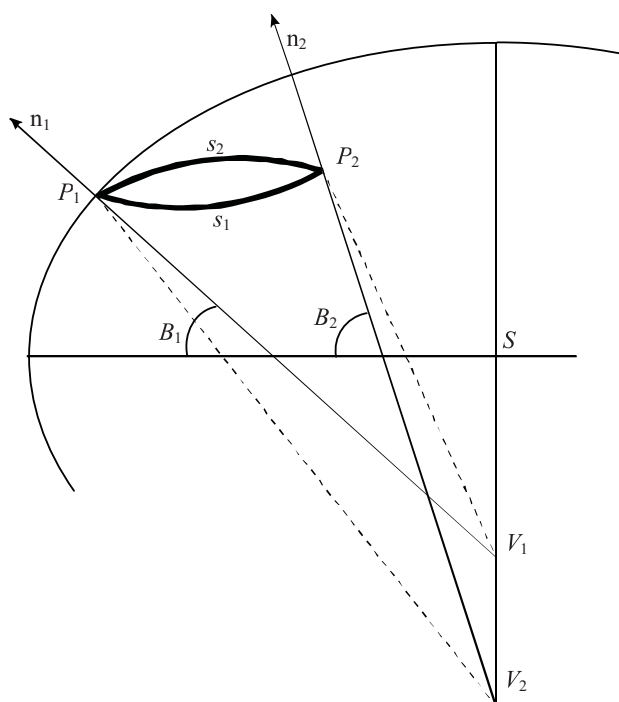
Obr. 3.2.1

Normály n_1, n_2 nebudou mimoběžné a obě roviny se ztotožní, jestliže body P_1, P_2 leží:

- na stejném poledníku – obě normály leží v jedné meridiánové rovině a oba normálové řezy splývají v jednu křivku, která je totožná s meridiánovou elipsou
- na stejné rovnoběžce – bod V_1 splyne s V_2 .

Pozn.: Naznačená situace nastává v praxi v okamžiku, kdy v bodě P_1 urovnáme svislou osu teodolitu do směru normály n_1 a zaměříme na bod P_2 . Záměrná rovina protne elipsoid v normálovém řezu s_1 . Při měření z bodu P_2 na P_1 záměrná rovina protne elipsoid v normálovém řezu s_2 .

Geodetická křivka. Definice geodetické křivky, resp. ortodromy pro kouli, byla uvedena v kap. 3.1.2. Na elipsoidu bychom geodetickou křivku vyznačili tak, že bychom mezi dvěma body napjali poddajný provazec, který by ve všech svých bodech přiléhal k elipsoidu. Stejně tak by tomu bylo i u jiných ploch, ovšem vždy s přihlédnutím k výše uvedené definici. K představě geodetické čáry na elipsoidu lze dospět ještě poněkud jinak. Vyjděme z jistého počátečního bodu A a v malé vzdálenosti vytýčíme bod B . Poté přejdeme na bod B , urovnáme stroj/teodolít, zaměříme na bod A a ve směru odchýleném o 180° vytýčíme bod C , opět v malé vzdálenosti. A tak pokračujeme až ke konečnému bodu Z pořadu. Křivka A, B, C, \dots, Z je křivkou geodetickou na elipsoidu. Zde je křivkou prostorovou. Uveďme další doplnění jejích vlastností pro elipsoid.



Obr. 3.2.2

1. Geodetická křivka na elipsoidu je obecně prostorová křivka. Ve speciálním případě je křivkou rovinnou, a to poledníkem, spojuje-li zemské póly.
2. Geodetická křivka protíná každý poledník (tj. jinou geodetickou křivku téže plochy) pod dvěma azimuty. Měříme-li jeden od severní a druhý od jižní větve poledníku, mají stejnou velikost.
3. Pro geodetickou křivku platí Clairautova věta: součin poloměru rovnoběžkové kružnice r a sinu azimutu A je pro každý bod P geodetické křivky konstantní. Platí $r \sin A = N \cos B \sin A = k_0$, kde k_0 je konstanta.
4. Průběh geodetické křivky:
 - azimut geodetické křivky $A \neq 0^\circ$

Pro křivku jdoucí na sever platí, že se zmenšujícím se poloměrem rovnoběžek se musí zvětšovat azimut geodetické křivky. Geodetická křivka protínající rovník pod azimutem A_0 (A_0 je minimální azimut křivky, rovník je maximální rovnoběžka s poloměrem a) jde na sever nejdále k mezní rovnoběžce, kterou nepřejde (zde $A = 90^\circ \Rightarrow \sin A = 1 \Rightarrow r = k = N \cos B$). Výchozí azimut A_0 na rovníku zároveň udává poloměr této mezní rovnoběžky (je-li $A_0 < 90^\circ \wedge B_0 = 0 \wedge N_0 = a \Rightarrow r = k = a \sin A_0$). Nastává její obrat k jihu, pod azimutem $A > 90^\circ$ přeje rovník a celý průběh se opakuje s tím rozdílem, že se nevrátí přesně do výchozího bodu na rovníku, ale obíhá elipsoid mezi oběma mezními rovnoběžkami v nekonečné řadě vln.

- azimut geodetické křivky $A = 0^\circ$

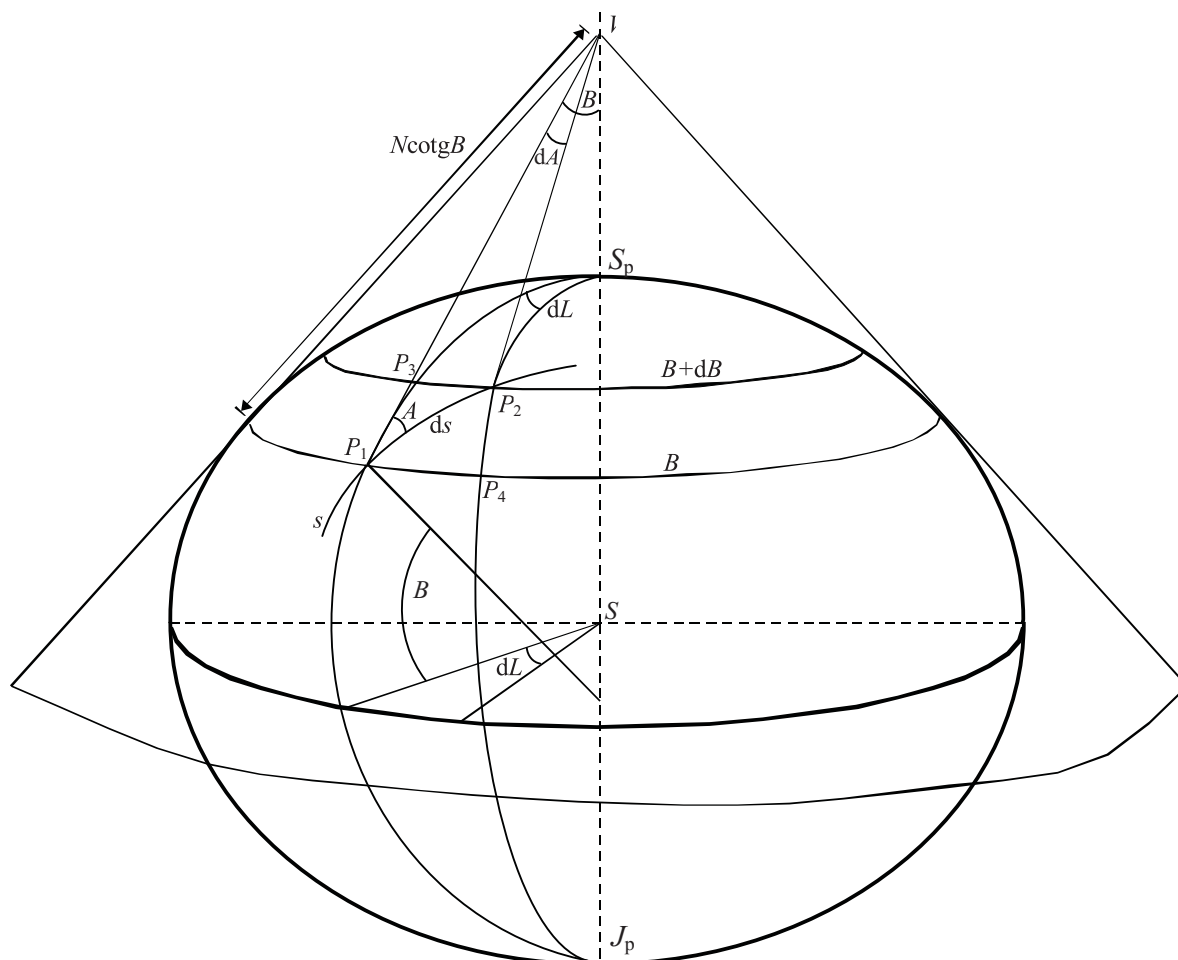
Je-li v některém bodě $A = 0^\circ$, platí to pro celý její průběh. Této podmínce vyhovují poledníky.

5. Geodetická křivka je nejkratší spojnicí obou koncových bodů a obecně leží mezi vzájemnými normálovými řezy, jejichž úhel rozděluje v poměru 1:2. Příčná vzdálenost

vzájemných normálových řezů je největší právě uprostřed a je geodetickou křivkou půlena.

6. Leží-li oba koncové body na společném poledníku, normálové řezy splývají a s nimi i geodetická křivka. Leží-li oba koncové body na téže rovnoběžce, normálové řezy splývají, ale geodetická křivka probíhá mimo. Při azimutech geodetické křivky blízkých 90° geodetická křivka protíná nebo se dotýká normálových řezů.

Mezi dvěma body na elipsoidu existují obecně 2 normálové řezy, ale jen jedna geodetická křivka. Řešení sféroidických trojúhelníků bude jednoznačné jen tehdy, spojíme-li jejich vrcholy geodetickými čarami. Při měření teodolitem ale záměrné roviny protínají elipsoid v normálových řezech a tedy měřené úhly se vztahují k nim. Pro velmi přesné výpočty se naměřené úhly redukuje z normálových řezů na geodetické křivky.



Obr. 3.2.3

Diferenciální rovnice geodetické křivky. Na obr. 3.2.6 je ds délkový element geodetické křivky vedené z bodu P_1 , do bodu P_2 pod azimutem A . Body P_1 a P_3 prochází rovnoběžky diferenciálně blízké; rozdíl jejich zeměpisných šířek je dB . Body P_1 a P_4 prochází rovněž dva diferenciálně blízké poledníky; rozdíl jejich zeměpisných délek je dL . Hlavní poloměry křivosti (bližší v kap. 3.2.3) v bodě P_1 jsou M, N .

Průmětem elementu ds geodetické křivky na poledník, procházející bodem P_1 , je délkový element poledníku mezi body P_1 a P_3 . Platí pro něj první diferenciální rovnice geodetické křivky $M dB = ds \cos A$. Průmětem elementu ds geodetické křivky na rovnoběžku,

procházející body P_1 a P_4 , je délkový element rovnoběžky mezi body P_1 a P_4 . Druhá diferenciální rovnice geodetické křivky je $N \cos B dL = ds \sin A$. Délkový element rovnoběžky mezi body P_1 a P_4 lze také vyjádřit z trojúhelníka P_1VP_4 . Je $N \cos B dL = N \cotg B dA$, kde $N \cotg B$ je délka VP_1 na povrchovém kuželu. Dělením dvou posledních diferenciálních rovnic se obdrží třetí diferenciální rovnice geodetické křivky ve tvaru

$$dA = \sin B dL = \frac{\sin A ds}{N \cotg B} = \frac{\sin A \operatorname{tg} B}{N} ds.$$

Geodetická křivka je tedy popsána soustavou diferenciálních rovnic

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M}, \quad \frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B}, \quad \frac{dA}{ds} = \frac{\sin A}{N \cotg B} \quad (3.2.15)$$

Poučné bude tyto rovnice porovnat s rov. (3.1.2).

Loxodroma na elipsoidu. Jak již bylo uvedeno v kap. 3.1.2, loxodroma je křivka, protínající všechny poledníky pod konstantním azimutem. Její rovnici lze odvodit s využitím obr. 3.2.7.

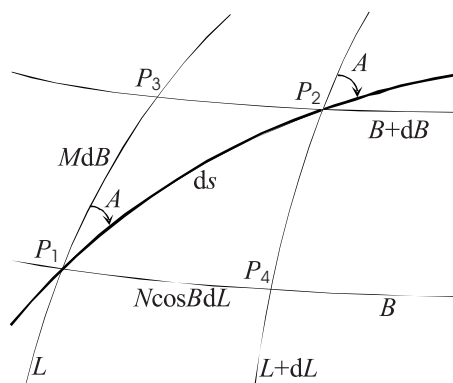
V diferenciálním trojúhelníku platí $\operatorname{tg} A = \frac{N \cos B dL}{M dB}$, neboli $dL = \operatorname{tg} A \frac{M}{N \cos B} dB$. Jedná se

sice o diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, ale řešení integrálu na pravé straně je poněkud složitější. Po vyřešení

$$L_2 - L_1 = \operatorname{tg} A (1 - e^2) \int_{B_1}^{B_2} \frac{1}{1 - e^2 \sin^2 B} \frac{dB}{\cos B}$$

má rovnice loxodromy na elipsoidu tvar

$$L_2 = L_1 + \operatorname{tg} A \ln \frac{\tan\left(\frac{B_2}{2} + 45^\circ\right)}{\tan\left(\frac{B_1}{2} + 45^\circ\right)} \left(\frac{1 - e \sin B_2}{1 + e \sin B_2}\right)^{\frac{e}{2}} \left(\frac{1 - e \sin B_1}{1 + e \sin B_1}\right)^{-\frac{e}{2}}.$$



Obr. 3.2.4

Podle trojúhelníku na obr. 3.2.7 lze sestavit rovnici vhodnou pro výpočet délky loxodromy s_{12} . Nesplývá-li loxodroma s rovnoběžkou, pak v diferenciálním trojúhelníku platí

$\cos A = \frac{MdB}{ds}$, viz též první rov. (3.2.15). A protože azimut A je konstantní, je pak

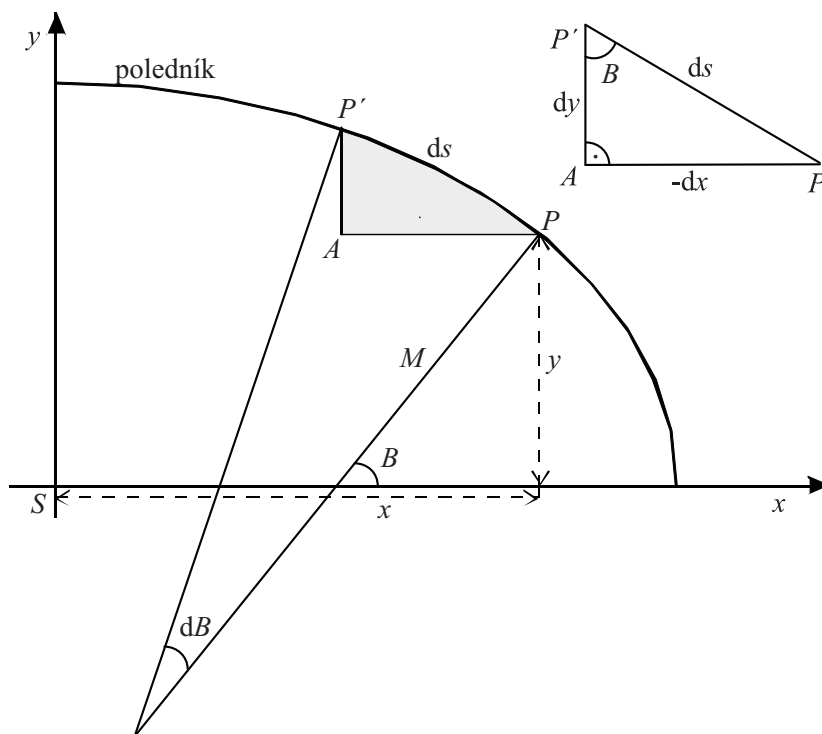
$s_{12} = \frac{1}{\cos A} \int_{B_1}^{B_2} MdB$. Je-li loxodroma zároveň rovnoběžkou (tj. má-li azimut $A = 90^\circ$ a tudíž

$\cos A = 0$), používá se pro výpočet délky loxodromy vztah $\sin A = \frac{N \cos B dL}{ds}$, viz druhá

rov. (3.2.15), a platí $s_{12} = \int_{L_1}^{L_2} N \cos B dL$.

3.2.3 Poloměry křivosti na elipsoidu

Normálou k elipsoidu v daném bodě P lze proložit nekonečně mnoho rovin kolmých k povrchu elipsoidu. Tyto roviny protínají elipsoid v *normálových řezech*, viz též kap. 3.2.2. Křivost plochy rotačního elipsoidu se mění s azimutem uvažovaného normálového řezu a navíc se zeměpisnou šířkou. V každém bodě na elipsoidu existují dva extrémní normálové řezy, tzv. hlavní normálové řezy, jejichž křivost je minimální a maximální. Odpovídajícími poloměry křivosti jsou *hlavní poloměry křivosti*: poledníkový poloměr křivosti M a příčný poloměr křivosti N . Z hlavních poloměrů křivosti se odvozují: poloměr křivosti R_α normálového řezu v libovolném směru a střední poloměr křivosti R_m , jak bude uvedeno v dalším textu. Křivost je převrácená hodnota poloměru křivosti.



Obr. 3.2.1

Poledníkový poloměr křivosti M . Bod P má geodetickou šířku B a jeho pravouhlé souřadnice v rovině poledníku jsou x, y , viz obr. 3.2.8. Při posunu z bodu P do bodu P' o délkový element ds se změní geodetická šířka o dB a pravouhlé souřadnice o $-dx$ a $+dy$ (souřadnice x se zmenší). Z obr. 3.2.8 plyne pro elementární oblouček ds vztah $ds = M dB$.

Oblouček ds lze vyjádřit i z trojúhelníku $PP'A$, který lze považovat za rovinný, $ds = -\frac{dx}{\sin B}$.

Dosazením tohoto vztahu do předchozího se dostane $-\frac{dx}{\sin B} = M dB$. Odtud $M = -\frac{1}{\sin B} \frac{dx}{dB}$.

Hodnota $\frac{dx}{dB}$ se vypočte derivací souřadnice x , viz první rov. (3.2.8), podle B . Jest

$$\frac{dx}{dB} = \frac{d}{dB} \left(\frac{a \cos B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \right) = \frac{-a \sin B (1-e^2 \sin^2 B) + ae^2 \sin B \cos^2 B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B} (1-e^2 \sin^2 B)} = -\frac{a(1-e^2) \sin B}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}}$$

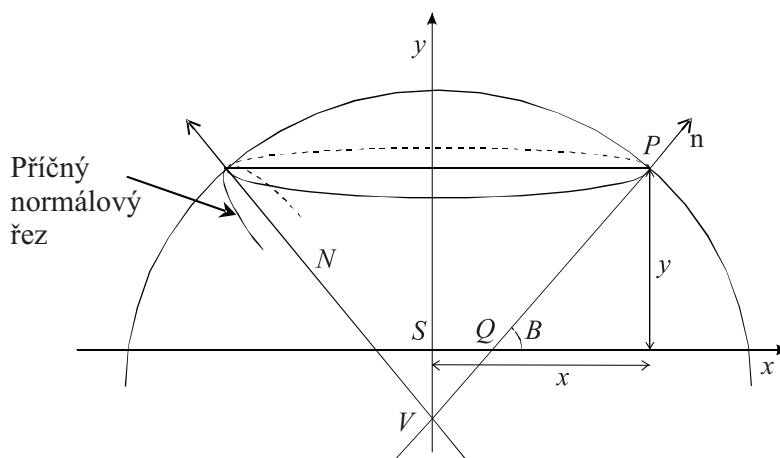
Vzorec pro poledníkový poloměr křivosti je tedy $M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3}$.

Minimální hodnoty nabývá pro $B = 0^\circ$: $M_0 = a(1-e^2)$.

Maximální hodnoty nabývá pro $B = 90^\circ$: $M_{90} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b} = c$.

Poledníkový poloměr křivosti je funkcí zeměpisné šířky B . Pro argument B byly proto hodnoty M tabelovány. Dnes se tyto výpočty realizují na PC.

Příčný poloměr křivosti N . Řez elipsoidu rovinou proloženou normálou v daném bodě P a kolmou k rovině meridiánu se nazývá příčný normálový řez. Je to obecně elipsa, kromě rovníku, kde je to kružnice. Normály k elipsoidu, sestavené ve všech bodech téže rovnoběžky o geodetické šířce B , se protínají v bodě V ležícím na malé ose b , obr. 3.2.9. Množina všech normál téže rovnoběžky tvoří povrch kužele o vrcholu V . Normála PV a její diferenciálně blízká normála jsou současně normálami i příčného normálového řezu. Platí, že průsečík dvou diferenciálně blízkých normál - bod V - je středem křivosti příčného normálového řezu.



Obr. 3.2.2

Příčný poloměr křivosti N je proto dán úsečkou $N=PV$. N je zároveň poloměr koule o středu V , která se dotýká elipsoidu podél rovnoběžky r . Podle obr. 3.2.9 platí $x = N \cos B$, tedy

$$N = \frac{x}{\cos B}, \text{ kde } x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}, \text{ viz první rov. (3.2.8). Dosazením se obdrží vyjádření pro}$$

$$\text{příčný poloměr křivosti } N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}.$$

Minimální hodnoty nabývá pro $B = 0^\circ$: $N_0 = a$.

$$\text{Maximální hodnoty nabývá pro } B = 90^\circ : N_{90} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b} = c.$$

Pozn.1.: Příčný poloměr křivosti je také funkcí B . Pro libovolný bod na elipsoidu je $N > M$ s výjimkou pólů. Poměr obou hlavních poloměrů křivosti je $\frac{N}{M} = \frac{1-e^2 \sin^2 B}{1-e^2}$. Čím víc se

blíží $\frac{N}{M} \rightarrow 1$, tím více se přibližuje elipsoidický povrch kulovému. Na pólu $\frac{N}{M} = 1$, tedy

$$M_{90} = N_{90} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b} = c. \text{ Maximální rozdíl meridiánového a příčného poloměru křivosti}$$

je na rovníku, kde $\frac{N}{M} = \frac{1}{1-e^2}$.

Pozn.2.: Délka normály mezi bodem P a rovníkem, s užitím druhé rov. (3.2.8), je

$$PQ = \frac{y}{\sin B} = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} = N(1-e^2).$$

Poloměr křivosti R_α v libovolném azimutu α . Z poloměrů křivosti M, N lze určit poloměr křivosti R_α normálového řezu v obecném azimutu α podle Eulerovy*) věty

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}. \text{ Na pólech je poloměr } R_\alpha \text{ ve všech směrech stejný.}$$

Střední poloměr křivosti R_m . Elipsoidickou plochu lze s určitou přesností nahradit plochou kulovou o středním poloměru a pak elipsoidické trojúhelníky řešit pomocí sférické trigonometrie. Střední poloměr koule je vztažen ke střední šířce B zobrazovaného území. Protože $M < R_m < N$, mohou se obě plochy ztotožnit jen v jednom bodě $P_0 [B_0, L_0]$. Koule o poloměru R_m jde pak ve směru poledníku L_0 nad elipsoidem, ve směru rovnoběžky B_0 pod plochou elipsoidu. Střední poloměr křivosti v určitém bodě je aritmetický průměr všech normálových poloměrů křivosti v tomto bodě. Podle věty Grunertovy⁵ je tento aritmetický průměr roven geometrickému průměru hlavních poloměrů křivosti M, N , tedy

$$R_m = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B}. \text{ Reciproká hodnota čtverce středního poloměru křivosti}$$

$$\frac{1}{R_m^2} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{N} = K \text{ je Gaussova míra křivosti plochy v bodě } P. \text{ Je to součin křivostí hlavních}$$

normálových řezů, vedených tímto bodem.

*) Důkaz věty Eulerovy a Grunertovy přesahuje rámec tohoto učebního textu.

3.2.4 Základní výpočty na rotačním elipsoidu

Výpočet délky poledníkového oblouku (rektifikace meridiánu). Jsou dány geodetické zeměpisné šířky B_1, B_2 koncových bodů a počítá se délka poledníkového oblouku. Jedná se o oblouk eliptický a obecné řešení vede k eliptickému integrálu. Oblouček ds poledníkové elipsy, odpovídající diferencially malé změně dB , se vypočte jako oblouk kruhový o poloměru M , tj. $ds = M dB$.

Délka poledníkového oblouku s od rovníku k bodu P o šířce B se vypočte integrací první rov. (3.2.15). Dostáváme

$$s = \int_0^B M dB = a(1-e^2) \int_0^B \frac{dB}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}}.$$

Délka poledníkového oblouku s mezi dvěma rovnoběžkami o šířkách B_1, B_2 se vypočte jako

rozdíl $s = s_1 - s_2$, kde $s_1 = \int_0^{B_1} M dB$, $s_2 = \int_0^{B_2} M dB$, viz obr. 3.2.10.

Délka poledníkového oblouku je funkcí B a byla tabelována k tomuto argumentu. Dříve se výpočet prováděl rozvojem funkce ve jmenovateli v řadu (odvození řad pro výpočet délky poledníkového oblouku viz např. [3], [6]). Dnes se výpočet provádí numericky na PC.

Výpočet ploch. Plošný element dP elipsoidického lichoběžníku, omezeného dvěma diferencially rovnoběžkami $B, B + dB$ a poledníky $L, L + dL$, viz obr. 3.2.7, je dán vztahem

$$dP = M N \cos B dB dL. \quad (3.2.16)$$

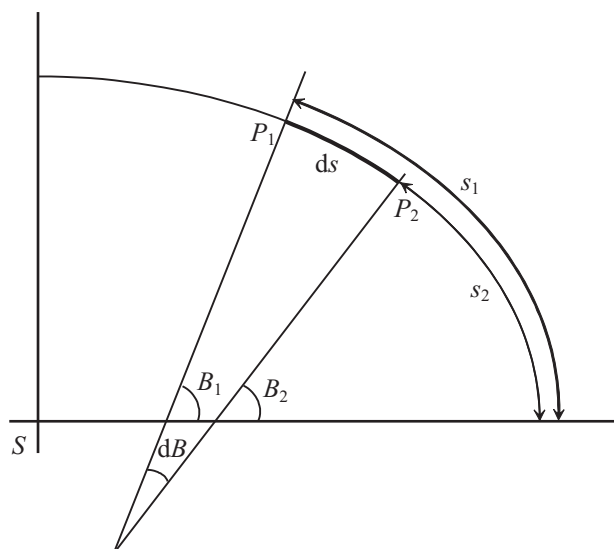
Plošný obsah elipsoidického lichoběžníku, omezeného dvěma rovnoběžkami B_1, B_2 a poledníky L_1, L_2 , se vypočte integrací rovnice (3.2.16). Postupně se získá

$$\begin{aligned} P &= \int_{B_1}^{B_2} \int_{L_1}^{L_2} MN \cos B dB dL = a^2(1-e^2) \int_{L_1}^{L_2} dL \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B dB}{(1-e^2 \sin^2 B)^2} = \\ &= a^2(1-e^2)(L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B dB}{(1-e^2 \sin^2 B)^2} \end{aligned}$$

kde rozdíl $L_2 - L_1$ je v radiánech.

Byly vyčísleny tabulky ploch lichoběžníků mezi dvěma poledníky L_1, L_2 od rovníku ($B = 0$) až po obecnou rovnoběžku. Při výpočtu bylo užito rozvoje funkce ve jmenovateli v řadu. Výsledný vztah pro výpočet povrchu celého elipsoidu pomocí řady je

$$P = 4\pi b^2 \left\{ 1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right\} \quad (3.2.17)$$



Obr. 3.2.1

Poloměr náhradní koule. V méně náročných výpočtech lze celý elipsoid nahradit koulí. Poloměr je možno odvodit třemi způsoby:

Koule má stejný objem jako elipsoid, tj. $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 b$, odtud $R = \sqrt[3]{a^2 b}$

Koule má stejný povrch jako elipsoid, s dosazením (3.2.17), platí

$$4\pi R^2 = 4\pi b^2 \left\{ 1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots \right\}, \text{ tedy } R = b \sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \dots}$$

Koule má poloměr rovný aritmetickému průměru všech tří poloos rotačního elipsoidu, tj. $R = \frac{2a+b}{3}$.

Všechny tři způsoby výpočtů poloměrů pro daný elipsoid jsou po zaokrouhlení na 0,1 km stejné. Pro elipsoid Besselův činí $R_{\text{Bess}} = 6370,3$ km, Krasovského $R_{\text{Kras}} = 6371,1$ km, elipsoid GRS80 $R_{\text{GRS80}} = 6371,0$ km.

3.2.5 Řešení sféroidických trojúhelníků

3.2.5.1 Řešení přechodem na náhradní kouli

Metoda excesová. Pro délky stran trojúhelníků kratší než 60 km lze postupovat takto: Sféroidický trojúhelník se řeší jako sférický na náhradní kouli o poloměru rovném střednímu poloměru křivosti v těžišti trojúhelníku R_m (viz kap. 3.2.2), který je vztažen ke střední šířce.

Exces se počítá ze vzorce $\varepsilon'' = \rho'' \frac{P}{MN} = \rho'' PK$, kde P je obsah trojúhelníka a K je Gaussova míra křivosti (viz kap. 3.2.2). Následuje řešení v rovině, které je uvedeno v četných učebnicích vyšší geodézie, např. [2], [6].

Metoda aditamentová. Střední poloměr křivosti se v důsledku malého zploštění elipsoidu poměrně málo mění se zeměpisnou šířkou. Pro celé území bývalé ČSSR lze volit jeden

poloměr $R_m = 6381,6$ km, který je vztažen k $B = 49^\circ 30'$. Lineární aditamenty v metrech se počítají ze vzorce $A_s = 4,093 \cdot 10^{-6} s^3$, kde délka strany s je v kilometrech, např. [2], [6].

Moderní postupy jsou založeny na numerické integraci rov. (3.2.15).

LITERATURA:

- [1] Böhm J.: Vyšší geodézie. Díl I. ČVUT, Praha 1979.
- [2] Cimbálník M., Mervart L.: Vyšší geodézie 1. ČVUT, Praha 1999.
- [3] Kabeláč J.: Příspěvek k rektifikaci meridiánu. Geod. a kart. obzor, sv. 1/43, č. 3, Praha 1955.
- [4] Pick M.: O exaktnosti v geodézii. V: Voj.-tech. informace, č. 58/1998, s.6-9.
- [5] Ryšavý J.: Vyšší geodézie. ČMT, Praha 1947.
- [6] Vykutíl J.: Vyšší geodézie. Vydavatelství Kartografie, Praha 1982.

3.3 Vztahy mezi dvěma elipsoidy

3.3.1 Úvod

Připomeňme, že následující asi tři stránky jsou opakováním a doplněním kap. 1.4.

Podle vazby souřadnicového systému elipsoidu na zemské těleso rozeznáváme 2 druhy rotačních elipsoidů.

Elipsoid referenční nemá střed totožný s těžištěm Země. Vedlejší poloosa nemusí být rovnoběžná s osou zemské rotace. Referenční elipsoid aproximuje těleso (geoid) jen v určité oblasti. V 18.-20. století byla odvozena řada elipsoidů, které se lišily kromě rozměrů i svou polohou a orientací vzhledem ke geoidu. Jde o tzv. geodetické datum^{*)}. Pro geodetické výpočty se užívaly elipsoidy, které odvodil např. Bessel, Hayford, Clarke, Krasovskij aj.

Elipsoid obecný (absolutní) vystihuje Zemi (geoid) jako celek. Musí splňovat následující čtyři podmínky:

- jeho geometrický střed je totožný s těžištěm Země,
- jeho vedlejší poloosa splývá s osou zemské rotace,
- součet čtverců převýšení geoidu od tohoto obecného elipsoidu je minimální,
- rotační rychlost je stejná jako rotační rychlost Země.

Tento elipsoid se nejlépe přimyká k povrchu celé Země. Příkladem je elipsoid systému WGS84 (World Geodetic System 1984).

Pro řešení řady aktuálních výpočtů v geodézii je nezbytné znát vztahy pro souřadnicové transformace mezi oběma typy elipsoidů. Tak se určí nejen vzájemná poloha těchto elipsoidů, ale získá se i možnost převedení souřadnic z jednoho elipsoidu na druhý a naopak. Tím, že se určí převodní vztahy mezi různými referenčními elipsoidy na jedné straně a obecným elipsoidem na straně druhé, získají se i převodní vztahy mezi referenčními elipsoidy navzájem. Úloha je též známa pod názvem *nalezení transformačního klíče*.

^{*)} Geodetické datum obsahuje velikost hlavní osy a číselnou výstřednost použitého referenčního rotačního elipsoidu. Dále obsahuje údaje, které jednoznačně určují jeho polohu vůči fyzikálnímu tělesu zemskému, resp. vůči geoidu. Jsou to: výška základního (výchozího, referenčního) bodu a orientace elipsoidu pomocí tížnicových odchylek a astronomických azimutů na referenčním bodě. Prostřednictvím měření na družice byly tyto orientační parametry nahrazeny sedmi transformačními, které jsou nazývány transformační klíč.

V kap. 3.3.2 budou odvozeny základní transformační rovnice pro převody mezi souřadnicovými systémy. V kap. 3.3.3 budou odvozeny zprostředkující rovnice pro určení transformačního klíče podle metody nejmenších čtverců (MNČ). Úlohy v kap. 3.3.4 jsou prezentovány jako vztahy mezi Besselovým elipsoidem a elipsoidem WGS84. Uvedené aplikace však platí pro libovolnou dvojici (rotačních) elipsoidů.

Besselův elipsoid byl odvozen v roce 1841 tzv. obloukovou metodou. Bessel využil výsledků měření deseti různých poledníkových oblouků a parametry elipsoidu vypočítal vyrovnáním podle MNČ. Oblouková metoda je ryze geometrická, při jejím užití se neuvažuje vliv tížnicových odchylek. Nezohledněné větší tížnicové odchylky v koncových bodech měřených poledníkových oblouků negativně ovlivnily přesnost výsledku (podrobné odvození viz např. [4]). Parametry Besselova elipsoidu jsou:

hlavní poloosa	$a = 6\,377\,397,155\,08\text{ m}$,
vedlejší poloosa	$b = 6\,356\,078,962\,90\text{ m}$,
výstřednost	$e^2 = 0,006\,674\,372\,230\,62$

Besselův elipsoid je vhodný zejména v oblastech střední Evropy, byl použit pro geodetické výpočty na našem území.

WGS84 je globální geocentrický geodetický systém, užívaný armádou USA. Parametry elipsoidu WGS84 jsou:

- primární:

hlavní poloosa	$a = 6\,378\,137\text{ m}$
výstřednost	$e^2 = 0,006\,694\,379\,990\,14$
geocentrická gravitační konstanta	$GM = 398600,4418\text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
úhlová rychlost rotace Země	$\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5}\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- sekundární:

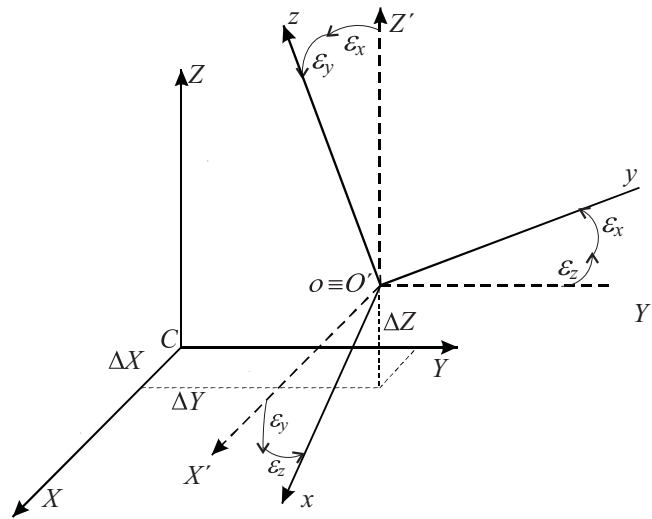
definují model struktury zemského tíhového pole pomocí geopotenciálních harmonických (Stokesových) koeficientů.

Počátek souřadnicové soustavy WGS84 je v těžišti C Země, viz obr. 3.3.1. Osa Z směřuje ke konvenčnímu terestrickému pólu^{*)}. Osa X je průsečnice základního poledníku a roviny rovníku, vztahené ke konvenčnímu terestrickému pólu. Osa Y doplňuje systém na pravouhlý pravotočivý systém (směr kladné části osy Y je 90° východně vzhledem k ose X). V systému WGS84 pracuje globální systém určování polohy GPS.

3.3.2 Odvození transformačních rovnic mezi dvěma souřadnicovými soustavami dvou elipsoidů

Podle obr. 3.3.1 uvažujme souřadnicový systém $S[X, Y, Z]$. Tento systém posuneme rovnoběžně tak, že počátek přejde z C do O' , čímž vznikne rovnoběžně posunutý systém $S'[X', Y', Z']$. Posun je dán vektorem $CO'[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]$, označme jej ΔS . Poté dojde k natočení do systému $s[x, y, z]$ vždy v kladném smyslu kolem osy X' o $+\varepsilon_x$, kolem osy Y' o

^{*)} Přesná měření ukázala, že dochází k posunu pólů po zemském povrchu. Zemská osa kolísá, tedy její průsečík s povrchem – tzv. okamžitý pól – není stálý. Opisuje na zemském povrchu složitou křivku přibližně kruhového tvaru, která nevychází ze čtverce o straně asi 20 m. Pohyb má periodický charakter. Střední hodnota pólu, tzv. konvenční terestrický pól (Conventional Terrestrial Pole – CTP) nebo také mezinárodní konvenční počátek (Conventional International Origin – CIO), je na základě přesných výpočtů definován mezinárodní službou ve smluveném geocentrickém souřadnicovém systému. Tato služba udává také polohu základního (nultého) poledníku (viz též kap. 3.2.1). Rovněž i střední pól se pohybuje, a to přibližně lineárně.



Obr. 3.3.1

$+\varepsilon_y$ a kolem osy Z' o $+\varepsilon_z$. Počátek zůstává nezměněn, $o \equiv O'$. Žádný z těchto dvou systémů s a S neupřednostňujeme. Pro odvození transformačních rovnic budeme nyní postupně převádět systém s do systému S' a ten do systému S .

Transformace probíhá ve třech krocích:

a) Rotace (otočení)

Maticový zápis otočení je

$$\mathbf{S}' = \mathbf{R} \mathbf{s} \quad (3.3.1)$$

kde matice rotace \mathbf{R} takto definovaného modelu je

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(X', x) & \cos(X', y) & \cos(X', z) \\ \cos(Y', x) & \cos(Y', y) & \cos(Y', z) \\ \cos(Z', x) & \cos(Z', y) & \cos(Z', z) \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

Kosiny úhlů, které spolu svírají jednotlivé souřadnicové osy, lze vyjádřit pomocí rotačních parametrů. Podle obr. 3.3.1 je

$$\begin{aligned} \cos(X', y) &= \cos(90^\circ + \varepsilon_z) = -\sin \varepsilon_z \doteq \varepsilon_z, & \cos(X', z) &= \cos(90^\circ - \varepsilon_y) = \sin \varepsilon_y \doteq \varepsilon_y, \\ \cos(Y', x) &= \cos(90^\circ - \varepsilon_z) = \sin \varepsilon_z \doteq \varepsilon_z, & \cos(Y', z) &= \cos(90^\circ + \varepsilon_x) = -\sin \varepsilon_x \doteq \varepsilon_x, \\ \cos(Z', x) &= \cos(90^\circ + \varepsilon_y) = -\sin \varepsilon_y \doteq \varepsilon_y, & \cos(Z', y) &= \cos(90^\circ - \varepsilon_x) = \sin \varepsilon_x \doteq \varepsilon_x, \\ \cos(X', x) &\doteq \cos(Y', y) \doteq \cos(Z', z) \doteq 1 \end{aligned}$$

a matice rotace (3.3.2) bude ve tvaru

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

b) Změna měřítka

Systém s má jiný rozměr než systém S , resp. S' . Měřítkový koeficient k vyjadřuje změnu délkového měřítka při přechodu mezi oběma systémy. Tedy

$$S' = (1+k)R s \quad (3.3.4)$$

c) Translace (posunutí)

Souřadnicové systémy $S[X, Y, Z]$ a $S'[X', Y', Z']$ jsou pouze rovnoběžně posunuty. Lze psát

$$S = S' + \Delta S \quad (3.3.5)$$

kde $\Delta S = [\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]$. Takže konečný tvar transformační rovnice je $S = \Delta S + (1+k)R s$, čili

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} + (1+k) \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.3.6)$$

Pro ilustraci je v tab. 3.3.1 uvedeno sedm parametrů, tj. parametrů transformačního klíče, pro převod ze souřadnicového systému Besselova elipsoidu do systému elipsoidu WGS84 a sedm parametrů pro převod ze systému elipsoidu WGS84 do systému Besselova elipsoidu, viz [2].

Tab. 3.3.1 Transformační koeficienty mezi geocentrickým elipsoidem WGS84 a elipsoidem Besselovým

Pro transformaci systému BESSEL → WGS84		Pro transformaci systému WGS84 → BESSEL	
ΔX	570,83789 [m]	Δx	-570,82850 [m]
ΔY	85,682641 [m]	Δy	-85,676889 [m]
ΔZ	462,84673 [m]	Δz	-462,84202 [m]
k	$3,5610256 \cdot 10^{-6}$	k	$-3,5623099 \cdot 10^{-6}$
ε_x	$\frac{4'',9984501}{3600} \frac{\pi}{180}$ [rad]	ε_x	$-\frac{4'',9984037}{3600} \frac{\pi}{180}$ [rad]
ε_y	$\frac{1'',5867074}{3600} \frac{\pi}{180}$ [rad]	ε_y	$-\frac{1'',5867164}{3600} \frac{\pi}{180}$ [rad]
ε_z	$\frac{5'',2611106}{3600} \frac{\pi}{180}$ [rad]	ε_z	$-\frac{5'',2610779}{3600} \frac{\pi}{180}$ [rad]

Pozn. Pro méně přesné výpočty je dostačující uvažovat pro obě transformace shodné číselné hodnoty koeficientů zaokrouhlené na dvě desetinná místa. Pokud by chtěl čtenář zdůvodnit nestejnost parametrů v druhém a čtvrtém sloupci, nechť si vyjádří transformační rovnice jednak podle rov. (3.3.6), jednak z rovnic pro opačnou transformaci a pak tyto výrazy porovná. Hodnoty uvedené v tab. 3.3.1. jsou upřesňovány podle počtu naměřených identických bodů.

3.3.3 Odvození zprostředkujících rovnic oprav pro určení transformačního klíče

Úpravou rov. (3.3.6) postupně dostaneme

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

po zanedbání veličin $k\varepsilon_x, k\varepsilon_y, k\varepsilon_z$, jakožto malých veličin 2. řádu. Dále je

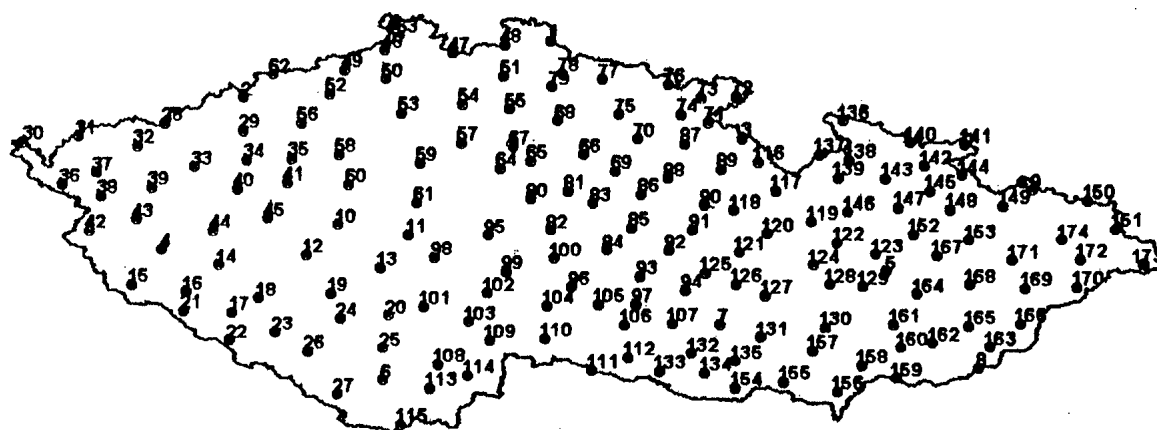
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-X \\ y-Y \\ z-Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

kde opravy v_x, v_y, v_z byly přisouzeny souřadnicím X, Y, Z . Po součtu prvních tří členů

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & y & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & z & y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X & \Delta Y & \Delta Z & k & \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} x-X \\ y-Y \\ z-Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (3.3.7)$$

Uvedená rov. (3.3.7) poskytuje jeden identický bod (bod, jehož souřadnice jsou známy v obou systémech). Pro zjištění sedmi neznámých parametrů, tj. pro zjištění transformačního klíče, nám postačí 3 identické body a již tyto dávají 2 nadbytečné rovnice. Přirozeně, že se snažíme znát co nejvíce identických bodů a pokud možno co nejrovnoměrněji rozmístěné v oblasti, pro niž transformační klíč určujeme.

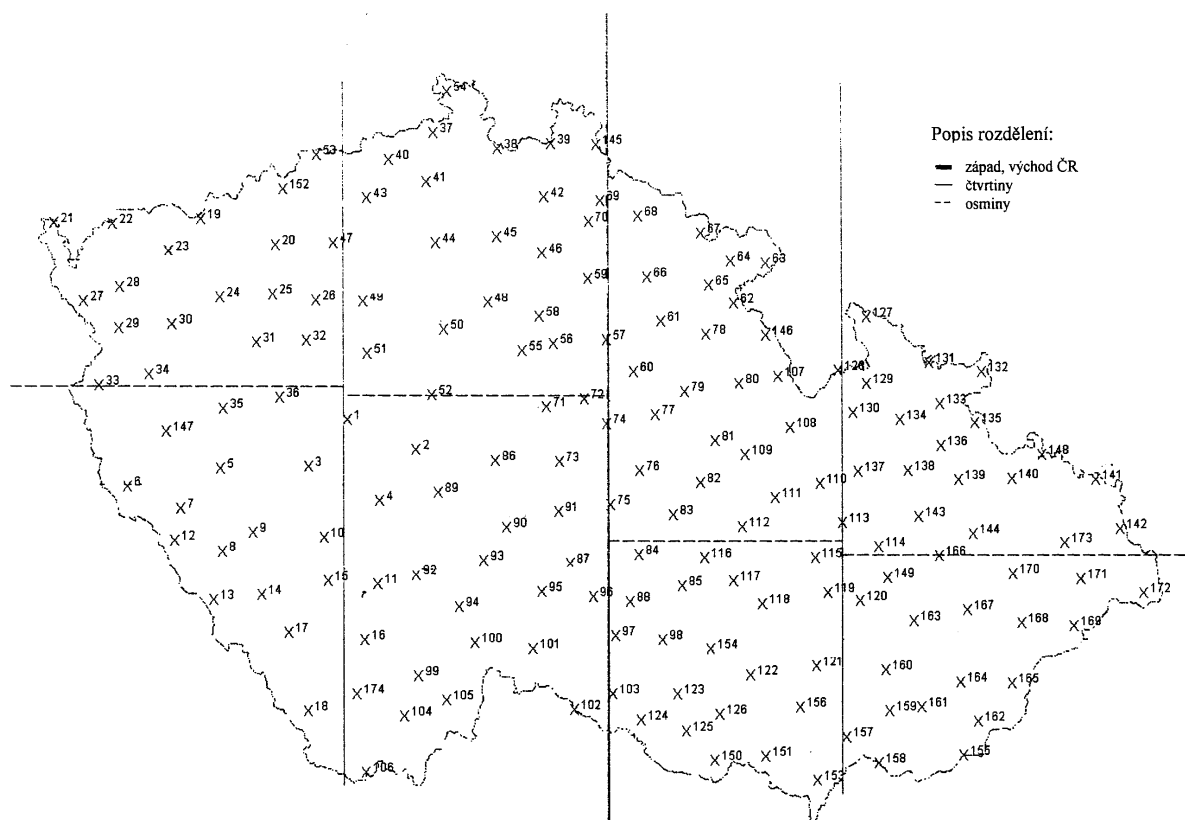
Jak souvisí změna parametru transformačního klíče se změnou oblastí si demonstrujeme na síti DOPNUL České republiky, která je znázorněna na obr. 3.3.2. Síť DOPNUL obsahuje 174 bodů. Údaje spojené s těmito body uvádí tab. 3.3.2. V práci [1] je Česká republika rozdělena do osmi částí, viz obr. 3.3.3. V tab. 3.3.3 jsou pro tyto oblasti uvedeny transformační klíče a je z nich zřejmá vysoká závislost na dané oblasti. Proto i transformační klíče, uvedené v tab. 3.3.1 platí jen pro danou lokalitu a daný výběr (poloha a počet) měřických bodů.



Obr. 3.3.1 174 bodů sítě DOPNUL

Tab. 3.3.2 Údaje v soustavě JTSK a WGS. Celkem pro 174 bodů sítě DOPNUL

Poř. č.	Y [m] (JTSK)	X [m] (JTSK)	H _n [m]	B[°] (ETRF-89)	L[°] (ETRF-89)	HW _e [m]
1	671228,90	962503,27	1124,11	50,88912629	15,27305379	1167,295
2	802514,00	980297,52	900,52	50,56899173	13,46561403	945,414
3	599837,23	1036805,53	1114,95	50,30130288	16,39765364	1158,767
4	851807,13	1074256,58	539,10	49,66660336	12,98430729	586,056
5	548455,98	1131166,65	260,19	49,50590845	17,24645657	303,687
6	771364,60	1176247,64	1104,33	48,86554726	14,28322618	1151,041
7	623031,56	1158574,23	522,19	49,19004126	16,26554921	567,638
8	515832,65	1200120,27	911,28	48,91671590	17,78265838	954,681
9	482482,54	1083309,25	239,19	49,98978154	18,09578083	335,597
10	775279,26	1069759,49	428,29	49,80874333	14,02499053	474,375
:						
170	469040,65	1149871,52	1024,25	49,40396401	18,36093957	1067,429
171	494681,45	1129445,20	546,07	49,56689118	17,98387554	589,228
172	465970,53	1131440,14	421,98	49,57143050	18,38170686	464,915
173	439668,58	1137022,90	481,79	49,54074431	18,75032945	524,567
174	472799,37	1117429,51	384,88	49,69173388	18,27104899	427,502



Obř. 3.3.2 Rozdělení ČR do oblastí pro sledování vývoje transformačního klíče

Tab. 3.3.3 Transformační klíče pro sedmiparametrickou transformaci (s výškami kvazigeoidu) pro transformaci S-JTSK → WGS84

Oblast	Poč. bodů	ΔX [m]	ΔY [m]	ΔZ [m]	k	ϵ_x ["]	ϵ_y ["]	ϵ_z ["]
Celá ČR	174	572.7531	88.4641	460.7861	0.000003551	-0.000024620	-0.000007261	-0.000024001
Západ ČR	87	575.3402	86.2578	463.6695	0.000003003	-0.000023586	-0.000007055	-0.000023431
Východ ČR	87	572.9331	85.7568	458.4731	0.000003893	-0.000025709	-0.000007425	-0.000025917
1. ¼	36	583.4203	86.4433	462.0009	0.000002399	-0.000022830	-0.000005723	-0.000022613
2. ¼	51	572.3573	85.2308	462.4271	0.000003472	-0.000024233	-0.000007491	-0.000024356
3. ¼	49	576.1692	92.6572	461.9987	0.000002958	-0.000026042	-0.000007267	-0.000024847
4. ¼	38	570.4024	78.6306	460.6493	0.000004101	-0.000026155	-0.000008378	-0.000028219
Horní ½	90	570.7430	88.8592	468.7941	0.000002771	-0.000024333	-0.000008254	-0.000023751
Dolní ½	84	567.8608	86.8981	455.3753	0.000004724	-0.000024488	-0.000007274	-0.000023916

3.3.4 Základní geometrické úlohy mezi dvěma rotačními elipsoidy

Odvozované vztahy budou demonstrovány na elipsoidu WGS84 a na Besselově elipsoidu. Zavedme pro ně následující označení:

C	těžiště Země, počátek systému WGS84
O	střed referenčního elipsoidu, počátek systému Besselova elipsoidu
$S_W [x_W, y_W, z_W]$	souřadnicový systém elipsoidu WGS84, počátek C, osy x_W, y_W, z_W
$S_B [x_B, y_B, z_B]$	souřadnicový systém Besselova elipsoidu, počátek O, osy x_B, y_B, z_B
$P [X_W, Y_W, Z_W]$	pravoúhlé souřadnice bodu P v systému elipsoidu WGS84
$P [X_B, Y_B, Z_B]$	pravoúhlé souřadnice bodu P v systému Besselova elipsoidu
$P [B_W, L_W, H_W]$	geodetické zeměpisné souřadnice bodu P v systému elipsoidu WGS84
$P [B_B, L_B, H_B]$	geodetické zeměpisné souřadnice bodu P v systému Besselova elipsoidu
$\alpha_W, \beta_W, \gamma_W$	směrové kosiny normály k elipsoidu WGS84 v souřadnicovém systému elipsoidu WGS84
$\alpha_B, \beta_B, \gamma_B$	směrové kosiny normály k Besselovu elipsoidu v souřadnicovém systému Besselova elipsoidu

Poznámka k převodu směrových kosinů. Nebude-li řečeno jinak, pak původní i převedené směrové kosiny se vztahují k jednomu a témuž směru. Převodní vzorce jsou dány rov. (3.3.4), v níž vektory S' a s zaměníme za vektory směrových kosinů v souřadnicových systémech S' a s . Od této transformace je třeba odlišovat případ, kdy přecházíme nejen do druhé soustavy, ale současně i na normálu k druhému elipsoidu. Např. přecházíme ze souřadnicového systému WGS84 do souřadnicového systému Besselova elipsoidu a současně i z normály k elipsoidu WGS84 na normálu k elipsoidu Besselovu. Ty je nutno spočítat

pomocí přetransformovaných souřadnic B' , L' ze vzorců $\alpha = \cos B' \cos L'$, $\beta = \cos B' \sin L'$, $\gamma = \sin B'$.

Úlohy uvedené v dalším textu na sebe navazují a společně tak tvoří jednu úlohu rozsáhlejší.

PŘÍKLAD 8

Jsou dány geodetické zeměpisné souřadnice B_W , L_W a výška H_W v systému WGS84, $a_W = 6378137$ m, $e_W^2 = 0,006\ 694\ 379\ 991$, $B_W = 50^\circ$, $L_W = 15^\circ$, $H_W = 10$ m. Vypočítejte prostorové pravoúhlé souřadnice X_W, Y_W, Z_W a směrové kosiny $\alpha_W, \beta_W, \gamma_W$ normály n k elipsoidu WGS84, viz obr. 3.3.4.

Dáno: $P[B_W, L_W, H_W]$

Určit: $P[X_W, Y_W, Z_W]$, $\alpha_W, \beta_W, \gamma_W$

Výpočet:

Podle rov. (3.2.2) v kap. 3.2.1 platí

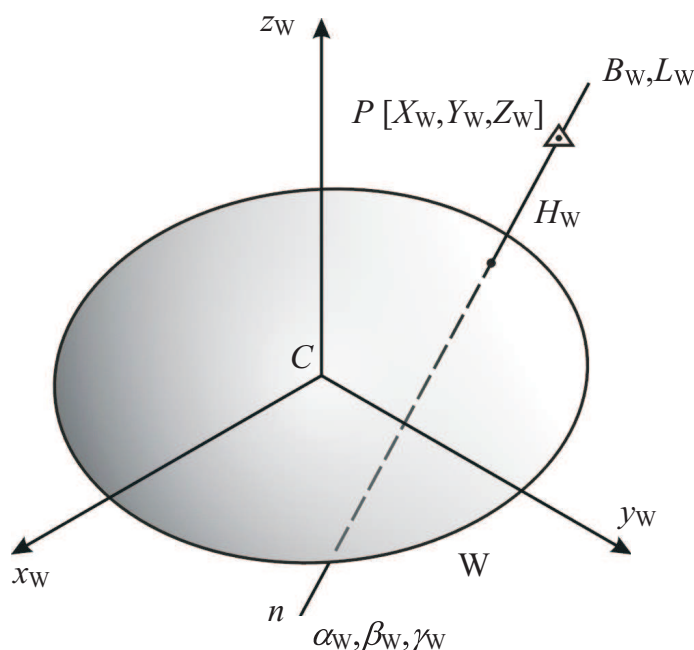
$$\begin{aligned} X_W &= (N_W + H_W) \cos B_W \cos L_W, Y_W = (N_W + H_W) \cos B_W \sin L_W, \\ Z_W &= (N_W (1 - e^2) + H_W) \sin B_W, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

kde N_W je příčný poloměr křivosti (definici viz kap. 3.2.3) elipsoidu WGS84. Směrové kosiny normály n se vypočtou ze vztahů

$$\alpha_W = \cos B_W \cos L_W, \beta_W = \cos B_W \sin L_W, \gamma_W = \sin B_W \quad (3.3.9)$$

a splňují rovnost

$$\alpha_W^2 + \beta_W^2 + \gamma_W^2 = 1. \quad (3.3.10)$$



Obr. 3.3.1

Výsledek:

$$N_W = 6\,390\,702,045, X_W = 3\,967\,898,226, Y_W = 1\,063\,195,125, Z_W = 4\,862\,796,699, \\ \alpha_W = 0,620\,885\,153, \beta_W = 0,166\,365\,675\,3, \gamma_W = 0,766\,044\,443\,1.$$

PŘÍKLAD 9

Jsou dány prostorové pravouhlé souřadnice X_W, Y_W, Z_W bodu P a směrové kosiny $\alpha_W, \beta_W, \gamma_W$ normály n k elipsoidu WGS84 v bodě P . Obojí v geocentrickém systému WGS84, viz obr. 3.3.5.

$$X_W = 3\,967\,898,226, Y_W = 1\,063\,195,125, Z_W = 4\,862\,796,699, \\ \alpha_W = 0,620\,885\,153, \beta_W = 0,166\,365\,675\,3, \gamma_W = 0,766\,044\,443\,1$$

Vypočítejte prostorové pravouhlé souřadnice X'_B, Y'_B, Z'_B téhož bodu a směrové kosiny $\alpha'_B, \beta'_B, \gamma'_B$ uvedené normály n v souřadnicovém systému Besselova elipsoidu. Známé je sedm parametrů určujících vzájemnou polohu obou elipsoidů, viz tab. 3.3.1 a obr. 3.3.5.

Dáno: $P[X_W, Y_W, Z_W], \alpha_W, \beta_W, \gamma_W$

Určit: $P[X'_B, Y'_B, Z'_B], \alpha'_B, \beta'_B, \gamma'_B$

Výpočet:

Prostorové pravouhlé souřadnice X_W, Y_W, Z_W bodu P v systému WGS84 se převedou na prostorové pravouhlé souřadnice X'_B, Y'_B, Z'_B v systému Besselova elipsoidu podle rov. (3.3.6), kde za parametry transformačního klíče dosadíme ze čtvrtého sloupce tab. 3.3.1.

Směrové parametry se vypočítají ze vztahů

$$\bar{\alpha}_B = (1+k)(\alpha_W - \varepsilon_z \beta_W + \varepsilon_y \gamma_W), \bar{\beta}_B = (1+k)(\varepsilon_z \alpha_W + \beta_W - \varepsilon_x \gamma_W), \\ \bar{\gamma}_B = (1+k)(-\varepsilon_y \alpha_W + \varepsilon_x \beta_W + \gamma_W) \quad (3.3.11)$$

Směrové kosiny pak určují vztahy

$$\alpha'_B = \frac{\bar{\alpha}_B}{\sqrt{\bar{\alpha}_B^2 + \bar{\beta}_B^2 + \bar{\gamma}_B^2}}, \beta'_B = \frac{\bar{\beta}_B}{\sqrt{\bar{\alpha}_B^2 + \bar{\beta}_B^2 + \bar{\gamma}_B^2}}, \gamma'_B = \frac{\bar{\gamma}_B}{\sqrt{\bar{\alpha}_B^2 + \bar{\beta}_B^2 + \bar{\gamma}_B^2}}. \quad (3.3.12)$$

a musí splňovat rovnost

$$\alpha_B'^2 + \beta_B'^2 + \gamma_B'^2 = 1 \quad (3.3.13)$$

Výsledek:

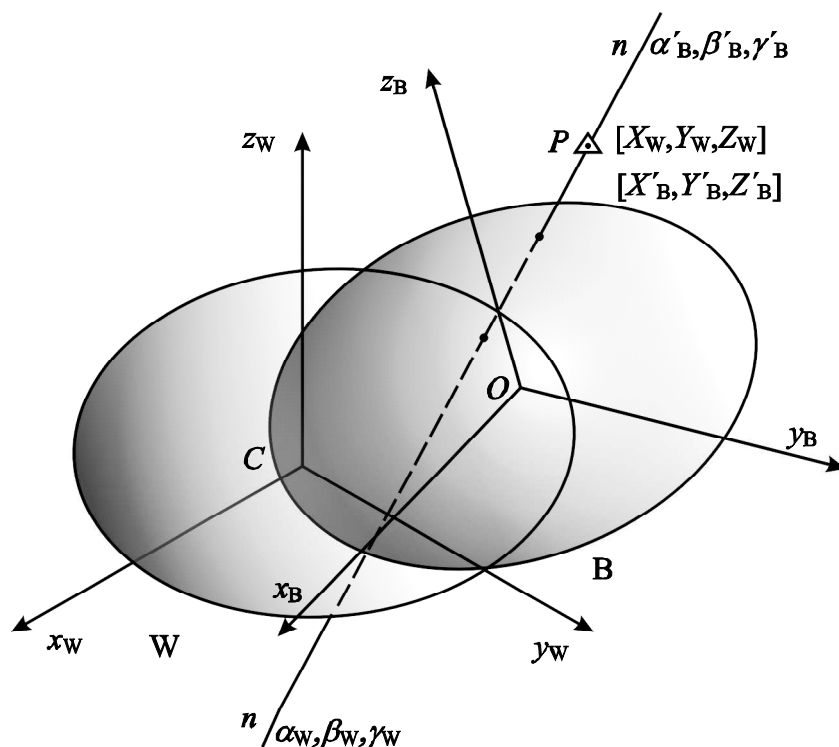
$$X'_B = 3\,967\,302,974, Y'_B = 1\,063\,122,294, Z'_B = 4\,862\,321,293, \\ \alpha'_B = \bar{\alpha}_B = 0,620\,883\,503\,5, \beta'_B = \bar{\beta}_B = 0,166\,368\,402\,3, \gamma'_B = \bar{\gamma}_B = 0,766\,045\,187\,8$$

PŘÍKLAD 10

Jsou dány prostorové pravouhlé souřadnice X_B, Y_B, Z_B bodu P v souřadnicovém systému Besselova elipsoidu, jakož i parametry Besselova elipsoidu.

$$a_B = 6\,377\,397,155, e_B^2 = 0,006\,674\,372\,231$$

$$X_B = 3\,967\,414,58, Y_B = 1\,063\,065,533, Z_B = 4\,862\,301,91$$



Obr. 3.3.2

Vypočtete geodetické zeměpisné souřadnice B_B , L_B a elipsoidickou výšku H_B nad Besselovým elipsoidem. Dále určete směrové kosiny α_B , β_B , γ_B normály n k Besselově elipsoidu v souřadnicovém systému Besselova elipsoidu.

Dáno: $P[X_B, Y_B, Z_B]$

Určit: $P[B_B, L_B, H_B]$, α_B , β_B , γ_B

Výpočet:

Podle PŘÍKLADU 7 v kap. 3.2.

Výsledek:

$B_B = 50^\circ$, $L_B = 15^\circ$, $H_B = 10$ m, $\alpha_B = \cos B_B \cos L_B = 0,620\ 885\ 1531$,

$\beta_B = \cos B_B \sin L_B = 0,166\ 365\ 675\ 4$, $\gamma_B = \sin L_B = 0,766\ 044\ 443\ 1$

Kontrola podle rov. (3.3.10), resp. (3.3.13) vyhovuje.

PŘÍKLAD 11

Jsou dány geodetické zeměpisné souřadnice B_B, L_B, H_B bodu P v systému Besselova elipsoidu, obr. 3.3.6.

$B_B = 50^\circ$, $L_B = 15^\circ$, $H_B = 10$ m

Vypočtete prostorové pravoúhlé souřadnice X_{1B}, Y_{1B}, Z_{1B} podbodu P_1 ve stejném systému. Podbod P_1 (vzhledem k bodu P) leží na Besselově elipsoidu a na společné normále n . Dále určete směrové kosiny $\alpha_{1B}, \beta_{1B}, \gamma_{1B}$ normály n , a to rovněž v souřadnicovém systému Besselova elipsoidu.

Dáno: $P[B_B, L_B, H_B]$

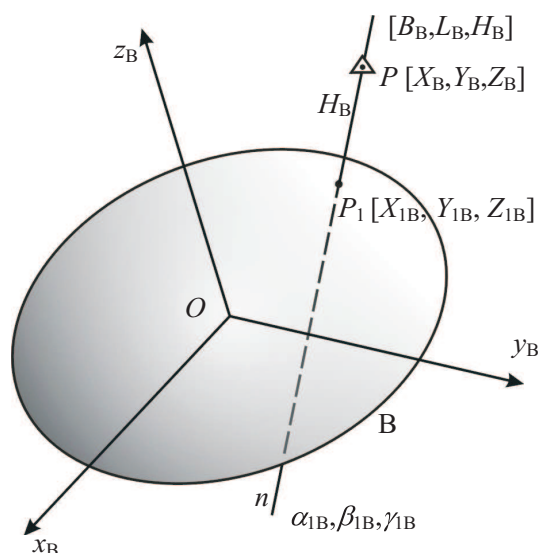
Určit: $P_1 [X_{1B}, Y_{1B}, Z_{1B}]$, $\alpha_{1B}, \beta_{1B}, \gamma_{1B}$

Výpočet:

Podle rov. (3.2.1) v kap. 3.2.1 platí

$$X_{1B} = N_B \cos B_B \cos L_B, \quad Y_{1B} = N_B \cos B_B \sin L_B, \quad Z_{1B} = N_B (1 - e^2) \sin B_B, \quad (3.3.14)$$

kde N_B je příčný poloměr křivosti v bodě P_1 .



Obr. 3.3.3

Pro směrové kosiny platí rov. (3.3.15), neboť bodem P i podbodem P_1 na elipsoidu prochází stejná normála n . Tedy

$$\alpha_{1B} = \alpha_B = \cos B_B \cos L_B, \quad \beta_{1B} = \beta_B = \cos B_B \sin L_B, \quad \gamma_{1B} = \gamma_B = \sin B_B. \quad (3.3.15)$$

Kontrola se provede vyčíslením rov. (3.3.13).

Výsledky:

$$X_1 = 3\,967\,408,371, \quad Y_1 = 1\,063\,063,869, \quad Z_1 = 4\,862\,294,250,$$

$$\alpha_{1B} = 0,620\,885\,153\,1, \quad \beta_{1B} = 0,166\,365\,675\,4, \quad \gamma_{1B} = 0,766\,044\,443\,1$$

PŘÍKLAD 12

Jsou dány $B_{1B}, L_{1B}, H_{1B} = 0$ m bodu P_1 v souřadnicovém systému Besselova elipsoidu. Rovněž jsou známé prostorové pravoúhlé souřadnice X_{1B}, Y_{1B}, Z_{1B} v souřadnicovém systému Besselova elipsoidu. Bodem P_1 prochází normála n k Besselovu elipsoidu, obr. 3.3.7. Je tedy dáno:

$$B_{1B} = 50^\circ, \quad L_{1B} = 15^\circ, \quad H_{1B} = 0 \text{ m}$$

$$X_{1B} = 3\,967\,408,371, \quad Y_{1B} = 1\,063\,063,869, \quad Z_{1B} = 4\,862\,294,250$$

1) Určete směrové kosiny $\alpha_{1B}, \beta_{1B}, \gamma_{1B}$ normály n v souřadnicovém systému Besselova elipsoidu.

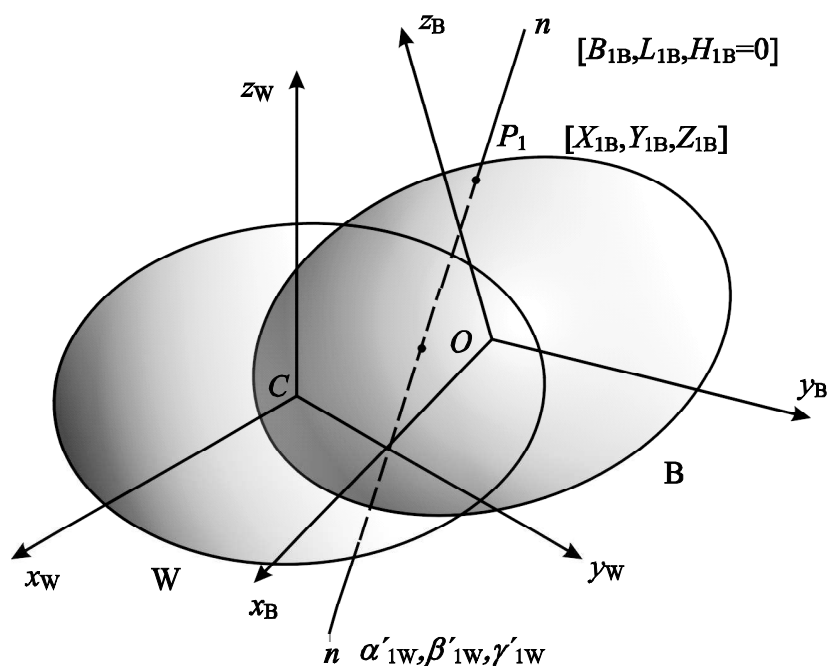
2) Dále vypočtete hodnoty prostorových pravoúhlých pravotočivých souřadnic $X'_{1W}, Y'_{1W}, Z'_{1W}$

bodů P_1 v souřadnicovém systému WGS84. A stejně tak převedte hodnoty $\alpha_{1B}, \beta_{1B}, \gamma_{1B}$ do souřadnicového systému WGS84 a označte je $\alpha'_{1W}, \beta'_{1W}, \gamma'_{1W}$. Sedm parametrů potřebných pro převod mezi elipsoidy převeďte z tab. 3.3.1. Kontrola se provede vyčíslením rov. (3.3.13) a zpětnou transformací podle rov. (3.3.6).

Dáno: $P_1 [B_{1B}, L_{1B}, H_{1B} = 0]$, $P_1 [X_{1B}, Y_{1B}, Z_{1B}]$, 7 převodních parametrů

Určit: 1) $n [\alpha_{1B}, \beta_{1B}, \gamma_{1B}]$

2) $P_1 [X'_{1W}, Y'_{1W}, Z'_{1W}]$, $n [\alpha'_{1W}, \beta'_{1W}, \gamma'_{1W}]$



Obr. 3.3.4

Výpočet:

ad 1) Jednoduše ze vztahů $\alpha_{1B} = \cos 50^\circ \cos 15^\circ$, $\beta_{1B} = \cos 50^\circ \sin 15^\circ$, $\gamma_{1B} = \sin 50^\circ$.

ad 2) Přebod do souřadnicového systému WGS84 se uskuteční pomocí rov. (3.3.6), rov. (3.3.11) a parametrů ve druhém sloupci tab. 3.3.1.

Výsledky:

$$\alpha_{1B} = 0,620\ 885\ 153\ 1, \beta_{1B} = 0,166365\ 675\ 4, \gamma_{1B} = 0,766\ 044\ 443\ 1$$

$$X'_{1W} = 3\ 968\ 083,625, Y'_{1W} = 1\ 063\ 136,703, Z'_{1W} = 4\ 862\ 769,653$$

$$\alpha'_{1W} = 0,620\ 886\ 802\ 5, \beta'_{1W} = 0,166\ 362\ 948\ 4, \gamma'_{1W} = 0,766\ 043\ 698\ 5$$

PŘÍKLAD 13

Jsou dány prostorové pravoúhlé souřadnice $X'_{1W}, Y'_{1W}, Z'_{1W}$ bodu P_1 , který leží na povrchu Besselova elipsoidu a směrové kosiny normály n v bodě P_1 vůči Besselově elipsoidu, a to obojí v souřadnicovém systému elipsoidu WGS84.

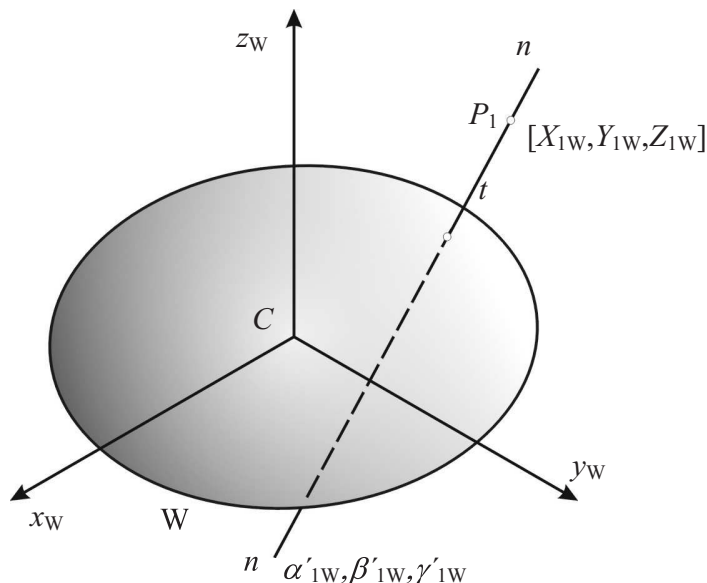
$$X'_{1W} = 3\ 968\ 083,625, Y'_{1W} = 1\ 063\ 136,703, Z'_{1W} = 4\ 862\ 769,653$$

$$\alpha'_{1W} = 0,620\ 886\ 802\ 5, \beta'_{1W} = 0,166\ 362\ 948\ 4, \gamma'_{1W} = 0,766\ 043\ 698\ 5$$

Určete odlehlost Besselova elipsoidu a elipsoidu WGS84 pro bod P_1 , viz obr. 3.3.8.

Dáno: $P_1[X_{1W}, Y_{1W}, Z_{1W}]$, $\alpha'_{1W}, \beta'_{1W}, \gamma'_{1W}$

Určit: odlehlost t Besselova elipsoidu a elipsoidu WGS84 měřenou po normále n .



Obr. 3.3.5

Výpočet:

Parametrická rovnice přímky určená bodem $P_1[X'_{1W}, Y'_{1W}, Z'_{1W}]$ a směrovými kosiny $\alpha'_{1W}, \beta'_{1W}, \gamma'_{1W}$ je

$$x = X'_{1W} + t\alpha'_{1W}, \quad y = Y'_{1W} + t\beta'_{1W}, \quad z = Z'_{1W} + t\gamma'_{1W}, \quad (3.3.16)$$

kde t je hledaný parametr. Rovnice elipsoidu WGS84 v souřadnicovém systému elipsoidu WGS84 je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2(1-e^2)} = 1, \quad (3.3.17)$$

kde a, e jsou parametry tohoto elipsoidu (viz kap. 3.3.1). Po úpravě má rovnice elipsoidu tvar

$$x^2 + y^2 + z^2 - e^2(x^2 + y^2) = a^2(1-e^2) \quad (3.3.18)$$

Dosazením rov. (3.3.16) do (3.3.18) se získá

$$(X'_{1W} + t\alpha'_{1W})^2 + (Y'_{1W} + t\beta'_{1W})^2 + (Z'_{1W} + t\gamma'_{1W})^2 - e^2[(X'_{1W} + t\alpha'_{1W})^2 + (Y'_{1W} + t\beta'_{1W})^2] = a^2(1-e^2)$$

a po dalších algebraických úpravách

$$\begin{aligned} & t^2[\alpha'^2_{1W} + \beta'^2_{1W} + \gamma'^2_{1W} - e^2(\alpha'^2_{1W} + \beta'^2_{1W})] + \\ & + 2t[X'_{1W}\alpha'_{1W} + Y'_{1W}\beta'_{1W} + Z'_{1W}\gamma'_{1W} - e^2(X'_{1W}\alpha'_{1W} + Y'_{1W}\beta'_{1W})] + \\ & + X'^2_{1W} + Y'^2_{1W} + Z'^2_{1W} - e^2(X'^2_{1W} + Y'^2_{1W}) - a^2 + a^2e^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Označí-li se v rov. (3.3.19)

$$A = [\alpha'_{1w}{}^2 + \beta'_{1w}{}^2 + \gamma'_{1w}{}^2 - e^2(\alpha'_{1w}{}^2 + \beta'_{1w}{}^2)] = 1 - e^2(1 - \gamma'_{1w}{}^2)$$

$$B = [X'_{1w}\alpha'_{1w} + Y'_{1w}\beta'_{1w} + Z'_{1w}\gamma'_{1w} - e^2(X'_{1w}\alpha'_{1w} + Y'_{1w}\beta'_{1w})] = (X'_{1w}\alpha'_{1w} + Y'_{1w}\beta'_{1w})(1 - e^2) + Z'_{1w}\gamma'_{1w} \text{ ře}$$

$$C = X'_{1w}{}^2 + Y'_{1w}{}^2 + Z'_{1w}{}^2 - e^2(X'_{1w}{}^2 + Y'_{1w}{}^2) - a^2 + a^2e^2 = (X'_{1w}{}^2 + Y'_{1w}{}^2 - a^2)(1 - e^2) + Z'_{1w}{}^2$$

ší se kvadratická rovnice $At^2 + 2Bt + C = 0$ pro neznámý parametr t . Řešením úlohy je menší ze dvou kořenů této rovnice. To odpovídá geometrické představě, že řešením úlohy vzdálenosti dvou elipsoidů je ten průsečík normály s povrchem elipsoidu WGS84, který je bližší k bodu P_1 . Druhý průsečík je na opačné straně elipsoidu. t vyjadřuje tedy výslednou odlehlost obou elipsoidů, která je zde počítána jako vzdálenost po normále k Besselově elipsoidu. Též je ovšem možné počítat vzdálenost obdobným způsobem po normále k elipsoidu WGS84.

LITERATURA:

- [1] Hálová L.: Porovnání transformačních klíčů z různých oblastí ČR. Diplomová práce, ZČU, Plzeň, 2000.
- [2] Kostecký J.: Určení transformačních koeficientů pro převod ze soustavy Besselova elipsoidu do soustavy elipsoidu WGS-84 a naopak. Práce VÚGTK, Praha.
- [3] Pick M.: O exaktnosti v geodézii. Vojensko-technická informace, č. 58, Praha 1998.
- [4] Vykuřil J.: Vyšší geodézie. Vydavatelství Kartografie, Praha 1982.

