4 Základní poznatky MNČ

4.1 Úvod

Předložená kapitola z vyrovnávacího počtu je nutným doplňkem zde uvedené učební látky z předmětů vyšší geodézie, fyzikální geodézie a kosmické geodézie. Je určena studentům ČVUT v Praze, ZČU v Plzni, VŠB Ostravské univerzity a dalším zájemcům. Některé části mají být prezentovány na stránkách Internetu.

Úkolem předložené práce je podat návod, a to jen s minimem odvozování a důkazů, jak zpracovávat naměřené veličiny, jakého způsobu vyrovnání použít pro daný případ, jakých vzorců a jak, již jen velmi stručně, výsledky zhodnotit. Vše je prováděno pomocí maticového zápisu a pomocí operací s maticemi a vektory. Proto zde čtenář nenajde Gaussův eliminační algoritmus pro řešení normálních rovnic, řadu tradičních kontrol aj.

Vyrovnání MNČ je jedním z oborů matematiky. Za jeho zakladatele je považován Karel Bedřich Gauss, i když práce Legendrea předběhla Gausse o několik let. Gaussova práce [1], která vznikla z potřeb souhrnného zpracování řad pozorování v různých časových obdobích, na různých místech, různými metodami a různými pozorovateli, byla iniciována astronomickým pozorováním komet. Vyšla v roce 1809, tedy o tři roky později než analogická práce [2] Legendrea. Gauss vděčí své prvořadosti důkladnému propracování a jeho srozumitelnému podání MNČ a jistě i odpovídající prezentaci. Zcela samostatně dospěl k této metodě P. S. Laplace, viz práce [3] z roku 1812.

U nás bylo nejprve čerpáno z cizí, francouzské a německé odborné literatury. Jedna z prvních vysoce kvalitních, česky psaných prací je práce F. Čuříka [4], v níž je uveden bohatý odkaz na práce zahraniční, především německé, francouzské a anglické. Z českých je zde citována práce [5] autorů F. Müllera a F. Novotného a [6] A. Semeráda. Z českých autorů jmenujme ještě V. Lásku [7], F. Čechuru [8], J. Ryšavého [9] a F. Fialu[10].

Předložené skriptum je zpracováno podle již moderního pojetí MNČ. Je jím kompendium H. Wolfa [11] a podle vyčerpávající práce [12] nestorů MNČ J. Böhma, V. Radoucha a M. Hampachera. Číselné příklady, uvedené v následujících řádcích jsou dílem autora a studentů-posluchačů Fakulty aplikovaných věd (FAV) Západočeské univerzity (ZČU). Práce je psána co nejstručněji, rádoby přehledně, nepodstatné úseky jsou bez odvození, případně jsou uvedeny jen odvolávky. Text navazuje na práci [13]. Tam najde čtenář další. Při studiu je však možno pokračovat i bez těchto odvolávek.

V předložené části je používána řada symbolů. Vždy při jejich prvním užití jsou vysvětleny. V následné části X. budou uvedeny další kapitoly o MNČ.

4.2 Vyrovnání metodou nejmenších čtverců

Zaveďme nejprve potřebnou symboliku

l_i …………………… naměřená hodnota

v_i ……………………oprava naměřené hodnoty

$\bar{l}_i$ …………………… opravená hodnota

Pak platí, že

$$\bar{l}_i = l_i + v_i \longrightarrow v_i = \bar{l}_i - l_i \qquad (4.2.1)$$

Chyba o_i je definována jako

$$o_i = -v_i = l_i - \bar{l}_i \tag{4.2.2}$$

pro $i = 1, \cdots, n$, kde n je počet měření. Uvedené opravy v_i mají náhodný charakter. Podle teorie MNČ musí splňovat následující tři podmínky:

- kladné a záporné opravy téže absolutní velikosti jsou stejně pravděpodobné
- malé opravy jsou pravděpodobnější než opravy velké
- opravy nad určitou mezní hodnotu se nevyskytují

Tyto požadavky splňuje tzv. Gaussův zákon

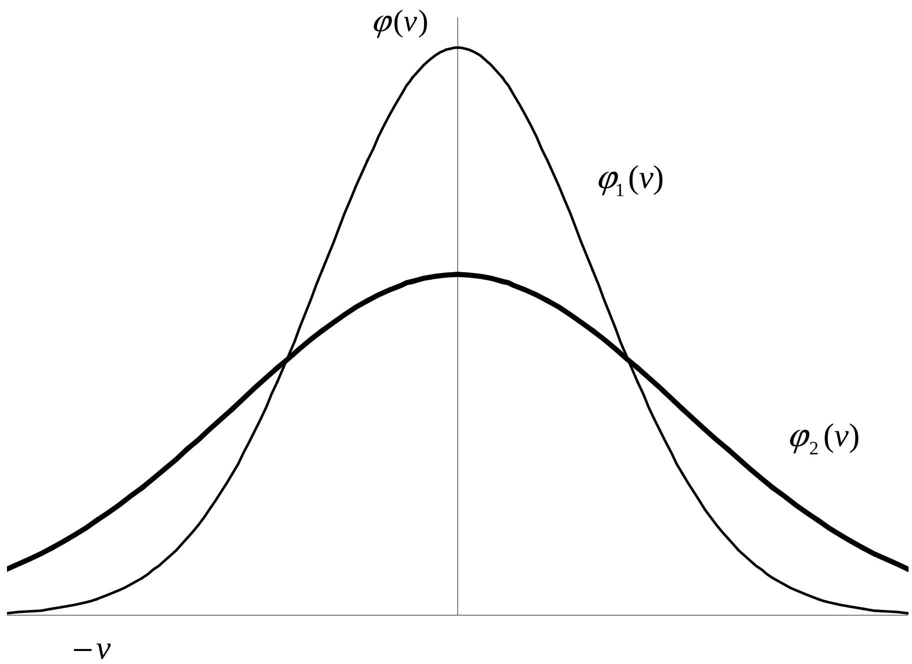
$$\varphi(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{(-h^2 v^2)} \tag{4.2.3}$$

kde h je jistý parametr. Rov. (4.2.3) je graficky znázorněna Gaussovou křivkou četnosti, viz obr. 4.2.1. Zde platí, že $h_1 > h_2$. Parametr h tedy určuje strmost Gaussovy křivky četnosti.

Pravděpodobnost, že se oprava objeví v intervalu $(-\infty, \infty)$ je 1. Pravděpodobnost, že se oprava objeví v intervalu $\langle v, v + dv \rangle$, je $p(v) = \varphi(v)\ dv$. Gaussova křivka četnosti, obr. 4.2.1, znázorňuje pravděpodobnost výskytu (četnost) náhodných oprav podle jejich velikosti.

Krom těchto oprav v_i s náhodným charakterem, existují ještě opravy:

- systematické (pro celou oblast měření) a polosystematické (proměnné pro dílčí oblasti měření) s nimiž pracuje rozšířená metoda MNČ, tzv. kolokace. Úplná střední chyba $\bar{m}$ se zde rovná součtu střední chyby m z náhodných oprav plus střední chyba m_S z vlivu chyb systematických a polosystematických, vše v kvadrátech. Používaný, leč přibližný vztah, je
$$\bar{m}^2 = m^2 + m_S{}^2$$
- hrubé, s nimiž MNČ nepracuje a je proto nutné je z měřického souboru vyloučit ještě před vlastním početním zpracováním.



Obr. 4.2.1 Gaussova křivka četnosti - Gaussův zákon chyb

Dodejme, že vše, co bylo napsáno o opravách v_i, platí i o chybách o_i. *Soubor* „nekonečně“ velký opatřujeme přívlastkem *základní* a soubor s malým počtem měření označujeme přívlastkem *výběrový* nebo též *empirický*.

ÚKOLEM VYROVNÁNÍ MNČ JE

- vypočítat nejpravděpodobnější hodnoty hledaných neznámých,
- odhadnout výpočtem přesnost výsledků vyrovnání.

Tyto úkoly splňuje podmínka

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P}\, \mathbf{v} = min^{*)} \tag{4.2.4}$$

kde

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n)^T \tag{4.2.5}$$

a

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \tag{4.2.6}$$

Zde jsou v_i opravy naměřených hodnot l_i a p_i jejich *váhy*, kde $i = 1, \cdots, n$ a n je počet měření. Je možno užít i jiných podmínek než podmínky (4.2.4). Tato je však používána nejčastěji a platí pro jakýkoliv počet měření [4]. Minimum se odvodí derivováním rov. (4.2.4) podle $\mathbf{v}$ nebo podle jiné proměnné, která $\mathbf{v}$ nahradí.

Váhy p_i jsou proměnná čísla, která charakterizují kvalitu, tj. přesnost naměřených hodnot. Určujeme je početně nebo i odhadem.

Způsoby vyrovnání budeme dělit do těchto hlavních skupin:

a) vyrovnání měření**) podmínkových, kap. 4.3
b) vyrovnání měření**) zprostředkujících, kap. 4.4
c) složitější vyrovnání, kap. 4.5, 4.6 a X. část.

Každý z těchto postupů volí svůj způsob splnění obou požadavků, tj. *určení pravdě nejpodobnějších hodnot* a *určení odhadů jejich přesností*, jak bude uvedeno v následujících kapitolách.

4.2.1 Výpočet odhadu přesnosti

Výpočet odhadu přesnosti začíná zpravidla výpočtem *střední jednotkové chyby*

$$m_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n'}} \tag{4.2.7}$$

kde $n' = n -$ počet nutných pozorování/měření je počet nadbytečných pozorování ve výraze $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$, viz rov. (4.2.4) ad. Protože platí vztahy

$$m_0^2 = p_1 m_1^2 = \ldots = p_i m_i^2 = \ldots = p_n m_n^2 \tag{4.2.8}$$

vypočteme *střední chybu jednotlivých měření* l_i ze vztahu

$$m_i = m_0 / \sqrt{p_i} = m_0 \sqrt{q_i}$$

---

*) Z této podmínky vychází Legendre a odvozuje svoji metodu, k níž dospěl empiricky. Vztah $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i v_i = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ převzal z mechaniky konkrétně pro statický moment celku.

**) Podle vzoru zahraniční literatury budeme výraz „měření“ často zaměňovat výrazem „pozorování“ (observace) kde $q_i = \frac{1}{p_i}$ je váhový součinitel a $i = 1,\ldots,n$ a n je počet pozorování/měření.

Střední chyba vyrovnaných hledaných neznámých x_i, případně jejich přírůstků dx_i, $i = 1,\ldots,k$ a k je počet těchto neznámých. Je

$$m_{xx_{ii}} = m_0 \sqrt{Q_{xx_{ii}}} \,,$$

kde $Q_{xx_{ii}}$ leží na hlavní diagonále $\mathbf{Q}_{xx}$, nebo-li $diag\mathbf{Q}_{xx} = \begin{pmatrix} Q_{xx_{11}} & Q_{xx_{22}} & \ldots & Q_{xx_{kk}} \end{pmatrix}$ a matice váhových součinitelů

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}$$

viz kap. 4.4.

Střední chyba funkce naměřených veličin l_i nechť má tvar $f = f\left(l_1 \;\; l_2 \;\ldots\; l_n\right)$, který rozvedeme do Taylorova rozvoje s užitím pouze veličin prvního řádu. Jsou

$$df = \frac{\partial f}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} dl_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial l_n} dl_n \,,$$

v kterém diferenciály nahradíme diferencemi a tyto středními chybami m_i jednotlivých měření, viz výše. Získaný vztah povýšíme na druhou a výrazy s různými koeficienty vypustíme, a to za předpokladu, že $n \to \infty$ a tudíž tyto výrazy vypadnou. Výsledná střední chyba funkce naměřených veličin je pak

$$m_f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial l_i} m_i \right)^2 = m_0^2 \mathbf{f}^T \mathbf{Q}\mathbf{f} \,, \tag{4.2.9}$$

kde $\mathbf{f}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial l_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial l_n} \end{pmatrix}$. Tento vztah představuje *odhad střední chyby funkce měřených veličin*. Zavedeme-li do rov. (4.2.9) rov. (4.2.8), dostáváme výraz

$$\frac{1}{p_f} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial l_i} \right)^2 \frac{1}{p_i} = \mathbf{f}^T \mathbf{Q}\mathbf{f} \,, \tag{4.2.10}$$

který představuje *odhad váhy funkce měřených veličin*.

Střední chyba funkce vyrovnaných neznámých (přírůstků). Nechť tato funkce má tvar $F = F\left(x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_k\right)$. Pak zcela analogicky k rov. (4.2.9) a (4.2.10) dostáváme

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} m_{x_i} \right) = m_0^2 \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F}$$

a

$$\frac{1}{p_F} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \frac{1}{p_k} = \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{F} \,, \text{ kde } \mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Téměř při každém zpracování měření MNČ se musíme ptát, které měření je třeba vypustit a která ponechat. *Kritériem vypuštění měření* je nerovnice

$$v_i \leq k_0 m_0 \tag{4.2.11}$$

kde k_0 je jistá, do značné míry subjektivně určená veličina. Obvykle se volí $k_0 = 2{,}5$.

4.2.2 Kontroly

Důležitými kroky výpočtu MNČ jsou kontroly. Průběžně je nutné, a to již při teoretických odvozováních, kontrolovat rozměry matic a vektorů a souhlas rozměrových jednotek. Tento jednoduchý způsob může odhalit mnohé chyby.

Číselnými kontrolami je rovnost vztahů

$$\mathbf{A}^T\mathbf{PAx} = -\mathbf{A}^T\mathbf{PL}\,,\quad \mathbf{A}^T\mathbf{Pv} = \mathbf{0} \tag{4.2.12}$$

dále dvojí výpočet oprav

$$\begin{aligned} &\mathbf{1.}\ \mathbf{v} = \mathbf{Ax} + \mathbf{L}\,,\ \mathbf{resp.}\ \mathbf{v} = \mathbf{A}\,d\mathbf{x} + \mathbf{L} \\ &\mathbf{2.}\ \mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{L} \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

kde **F(x)** je nelinearizovaná zprostředkující funkce, která obsahuje vyrovnané neznámé **x.** V dřívějších postupech vyrovnání, před použitím počítačů, se používali ještě tři tzv. sigmové zkoušky. V případě, že výpočetní program je naprogramován a odladěn, je možno od nich upustit. Zní

$$\sum\nolimits_1 = \mathbf{L}^T\mathbf{PAx} + \mathbf{L}^T\mathbf{PL}\,,\quad \sum\nolimits_2^{'} = \mathbf{L}^T\mathbf{v}\,,\quad \sum\nolimits_3 = \mathbf{v}^T\mathbf{Pv} \tag{4.2.14}$$

a má být splněno, že $\sum_1 = \sum_2^{'} = \sum_3$. Klasická sigmová zkouška $\sum_2$ užívá početního výrazu, který zde není obsažen. Proto byla zvolena jiná alternativa. Sigmové zkoušky budou prováděny jen sporadicky.

4.3 Podmínková pozorování*)

Úkolem je vypočítat MNČ opravy $v_1, v_2, \cdots, v_n$ naměřených hodnot $l_1, l_2, \cdots, l_n$ při splnění podmínky $\mathbf{v}^T\mathbf{Pv} = min$ a současně, aby opravené naměřené hodnoty $l_i + v_i$ splňovaly určité, předem dané, podmínky v počtu $r < n$ a n je počet měřených veličin a tudíž i počet oprav. Pro názornost milému čtenáři uveďme příklad vyrovnání velmi často vystupující v geodetické praxi. Totiž, měříme-li úhly v trojúhelníku, pak jejich součet musí být 180°. Toto vyjadřuje *podmínková rovnice*

$$\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 - 180° = 0\,,$$

což je podmínka nutně splnitelná. Jistě se tak, jen s pomocí naměřených hodnot, nestane. Nutno připojit opravy. Je pak

$$\begin{gathered} \alpha_1 + v_1 + \alpha_2 + v_2 + \alpha_3 + v_3 - 180° = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 + U = 0 \end{gathered} \tag{4.3.1}$$

kde

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 180°$$

je tzv. *uzávěr*. Rov. (4.3.1) je tzv. *přetvořenou podmínkovou rovnicí*. Takovýchto rovnic může být celá řada, viz PŘÍKLAD 14 v kap. 5.2. Poznamenejme ještě, že namísto 180^o je často uvedeno 200^g.

Vraťme se k našemu výkladu. Zapišme r přetvořených rovnic oprav ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n + U_1 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{r1}v_1 + \cdots + a_{rn}v_n + U_r &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

a maticově

*) Ve starší literatuře, ještě např. v [4], jsou označována: závislá pozorování. Ta nyní označují naprosto jiný případ pozorování, viz část X.

$$\mathbf{B}\,\mathbf{v} + \mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{4.3.3}$$

kde

$$\underbrace{\mathbf{B}}_{r\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\mathbf{v}}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\mathbf{U}}_{r\times 1} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_r \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\mathbf{0}}_{r\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zde je r počet podmínek a tedy i uzávěrů a n počet oprav. Nyní musíme uvážit podmínku minima

$$\mathrm{v}^T\,\mathrm{P}\,\mathrm{v} = \boldsymbol{min}$$

ovšem při zachování platnosti (vedlejších) daných podmínek (4.3.2). Proto použijeme Lagrangeova postupu pro nalezení minima. Zní

$$\underbrace{\mathbf{v}}_{1\times n}^{T}\,\underbrace{\mathbf{P}}_{n\times n}\,\underbrace{\mathbf{v}}_{n\times 1} + 2\underbrace{\mathbf{k}}_{1\times r}^{T}\left(\underbrace{\mathbf{B}}_{r\times n}\,\underbrace{\mathbf{v}}_{n\times 1} + \underbrace{\mathbf{U}}_{r\times 1}\right) = min \tag{4.3.4}$$

kde $\mathbf{k}$ je vektor neznámých *korelát*

$$\underbrace{\mathbf{k}}_{r\times 1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}^T \tag{4.3.5}$$

Rov. (4.3.4) derivujeme podle $\mathbf{v}$, položíme rovnou nule a společně s rov. (4.3.3) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{Pv} + \mathbf{B}^T\mathbf{k} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Bv} &= -\mathbf{U} \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

4.3.1 Přímé řešení podmínkových pozorování

Rov. (4.3.6) je možno napsat ve tvaru

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}}_{[(n+r)\times(n+r)]\times(n+r)\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{U} \end{pmatrix}}_{(n+r)\times 1} \tag{4.3.7}$$

takže

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0}_1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{U} \end{pmatrix} \tag{4.3.8}$$

Uvedenou matici je možno invertovat jako celek nebo postupně invertovat jednotlivé podmatice, viz [13]. Tímto jsou určeny nejpravděpodobnější hledané hodnoty neznámých náhodných oprav a korelát.

Odhady přesností výsledků. Nejprve se vypočte střední jednotková chyba $m_0 = \left[\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}/r\right]^{1/2}$. Poté – netradičně – použijeme z rov. (4.3.8) inverzní matici $\mathbf{Q}_{xx} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0}_1 \end{pmatrix}^{-1}$ a z ní vyjmeme prvky $diag\left(Q_{ll_{11}} \ \cdots \ Q_{ll_{nn}} \ Q_{kk_{11}} \ \cdots \ Q_{kk_{rr}}\right)$. Pomocí nich střední chyby vyrovnaných úhlů jsou

$$m_{ll_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{ll_{ii}}} \tag{4.3.9}$$

a střední chyby korelát jsou

$$m_{kk_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{kk_{ii}}} \tag{4.3.10}$$

4.3.2 Postupné řešení podmínkových pozorování

Z první rov. (4.3.6) vyplývá, že

$$\underbrace{\mathbf{v}}_{n\times1} = -\underbrace{\mathbf{P}}_{n\times n}^{-1}\underbrace{\mathbf{B}}_{n\times r}^{T}\underbrace{\mathbf{k}}_{r\times1} \tag{4.3.11}$$

Po jejím dosazení do druhé rov. (4.3.6) máme $-\mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{k} = -\mathbf{U}$, z čehož

$$\underbrace{\mathbf{k}}_{r\times1} = \left(\underbrace{\mathbf{B}}_{r\times n}\underbrace{\mathbf{P}}_{n\times n}^{-1}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\underbrace{\mathbf{U}}_{r\times1} \tag{4.3.12}$$

Zavedeme obligátně

$$\underbrace{\mathbf{N}}_{r\times r} = \mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T \tag{4.3.13}$$

a je pak

$$\underbrace{\mathbf{k}}_{r\times1} = \underbrace{\mathbf{N}}_{r\times r}^{-1}\underbrace{\mathbf{U}}_{r\times1} \tag{4.3.14}$$

kde

$$\mathbf{Q}_{kk} = \underbrace{\mathbf{N}}_{r\times r}^{-1} \tag{4.3.15}$$

je *váhová matice korelát*. Postup výpočtu je velmi jednoduchý, nejprve se zjistí z rov. (4.3.14) koreláty a poté opravy z rov. (4.3.11).

Odhady přesnosti výsledků. Stejně jako u 1. řešení, i zde vypočteme střední jednotkovou chybu m_0. Pomocí $diag\left(Q_{kk_{11}} \;\cdots\; Q_{kk_{rr}}\right)$ pak střední chyby korelát jsou

$$m_{kk_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{kk_{ii}}} \tag{4.3.16}$$

Další výpočet středních chyb oprav viz přímé řešení nebo [12, str.201].

Zcela odlišný postup číselného zpracování nejpravděpodobnějších hodnot i odhadu jejich přesnosti z podmínkových pozorování spočívá v převodu na pozorování zprostředkující, jak je uvedeno v [13]. Tím se nabízí aspoň číselné ověření výše navrženého 1. řešení.

Jiné by bylo odvození v případě, kdyby podmínky platily mezi neznámými hledanými veličinami $\mathbf{x}$ apod.

Číselnou aplikaci viz PŘÍKLAD 14 v kap. 5.2.

4.4 Zprostředkující pozorování

V geodézii, ale i v jiných oborech technických věd, se často vyskytuje úkol určit číselné hodnoty veličin, které nelze přímo, bezprostředně, měřit a tedy určit. Proto je nutno jejich zjištění zprostředkovat pomocí jiných veličin, které je možno měřit a které jsou s hledanými neznámými veličinami ve známém funkčním vztahu. Označme

$\mathbf{x} = \left(x_1 \;\cdots\; x_k\right)^T$ ………… vektor neznámých hledaných veličin

$\mathbf{x_0} = \left(x_{10} \;\cdots\; x_{k0}\right)^T$ ……… vektor jejich známých přibližných hodnot

$d\mathbf{x} = \left(dx_1 .... dx_k\right)^T$ ……….vektor jejich neznámých, vyrovnávaných přírůstků

$F_i(\mathbf{x})$ ……………………funkční vztah mezi hledanými $\mathbf{x}$ a měřenými l_i veličinami

l_i ....naměřená zprostředkující veličina

v_i ....její oprava

$\bar{l}_i$ ....její vyrovnaná hodnota

i ....index i-té zprostředkující rovnice

Pak platí

$$F_i(\mathbf{x}) = \bar{l}_i$$
$$F_i(x_1 \quad \cdots \quad x_k) = l_i + v_i$$
$$F_i(x_{10} + dx_1 \quad \cdots \quad x_{k0} + dx_k) = l_i + v_i$$

Levou stranu rozvedeme do Taylorova rozvoje, pokud není již v lineárním tvaru, a zanedbáme členy 2. řádu a vyšší. Dostáváme

$$F_i(\mathbf{x_0}) + \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\mathrm{d}\,x_1 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\mathrm{d}\,x_k = l_i + v_i$$
$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\mathrm{d}\,x_1 + \cdots + \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\mathrm{d}\,x_k + F_i(\mathbf{x}_0) - l_i = v_i$$

Upravme symboliku a dostáváme

$$a_{i1}\, dx_1 + a_{i2}\, dx_2 + \ldots + a_{ik}\, dx_k + F_i\,(\mathbf{x_0}) - l_i = v_i \qquad (4.4.1)$$

kde $i = 1, \cdots, n$ a n je počet linearizovaných zprostředkujících rovnic oprav a k je počet hledaných neznámých. Výraz

$$F_i(\mathbf{x}_0) - l_i = L_i$$

je tzv. *absolutní člen*. Rov. (4.4.1) rozepišme pro všechna i a zaveďme symboly matic a vektorů. Dostaneme

$$\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L} = \mathbf{v} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \qquad (4.4.2)$$

kde

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{n\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \qquad d\underbrace{\mathbf{x}}_{k\times 1} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_k \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\mathbf{L}}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}_0) - l_1 \\ F_2(\mathbf{x}_0) - l_2 \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}_0) - l_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\mathbf{P}}_{n\times n} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\mathbf{v}}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\mathbf{Q}}_{n\times n} = \begin{pmatrix} p_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Zde je $d\mathbf{x}$ vektor hledaných neznámých, $\mathbf{L}$ vektor absolutních členů, a v něm $F_i(\mathbf{x}_0)$ hodnoty vypočtené z přibližně známých vstupních veličin a l_i jsou hodnoty naměřené, $\mathbf{v}$ je vektor oprav, $\mathbf{P}$ matice vah a $\mathbf{Q}$ je její inverzní matice, tzv. matice *váhových koeficientů*. Systém rov. (4.4.2) podrobíme podmínce minima. Dostáváme

$$\frac{\partial \mathbf{v^T P v}}{\partial d\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial d\mathbf{x}}\left[(\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L})^T \mathbf{P}(\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L})\right] = \frac{\partial}{\partial d\mathbf{x}}\left[(d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{L}^T)\mathbf{P}(\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L})\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial d\mathbf{x}}\left(d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A}d\mathbf{x} + d\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{P}\mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{L}^T \mathbf{P}\mathbf{L}\right)$$

Po derivování a úpravách dostáváme postupně rovnice

$$2\mathbf{A}^T\mathbf{PA}d\mathbf{x}+\mathbf{A}^T\mathbf{PL}+\mathbf{A}^T\mathbf{PL}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{PA}d\mathbf{x}+\mathbf{A}^T\mathbf{PL}=\mathbf{0}$$

které nazýváme *normální rovnice*. Hledané neznámé přírůstky pak jsou

$$d\mathbf{x}=-\left(\mathbf{A}^T\mathbf{PA}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{PL} \tag{4.4.3}$$

V této rovnici se často zavádí

$$\mathbf{A}^T\mathbf{PA}=\underbrace{\mathbf{N}}_{k\times k} \tag{4.4.4}$$

kde

$$\underbrace{\mathbf{N}^{-1}}_{k\times k}=\mathbf{Q}_{xx} \tag{4.4.5}$$

je *matice váhových koeficientů* hledaných neznámých přírůstků $d\mathbf{x}$. Jednotková střední chyba

$$m_0=\left[\mathbf{v}^T\mathbf{Pv}/(n-k)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.4.6}$$

a střední chyby vyrovnaných neznámých resp. jejich přírůstků jsou

$$m_{dx_i}=m_0\sqrt{Q_{xx_{ii}}} \tag{4.4.7}$$

kde

$$\mathbf{Q}_{xx}=diag\left(Q_{xx_{11}}\quad Q_{xx_{22}}\quad \cdots\quad Q_{xx_{ii}}\quad \cdots\quad Q_{xx_{kk}}\right) \tag{4.4.8}$$

Střední chybu m_f *funkce přímo měřených veličin* jakož i *střední chybu* m_F *funkce vyrovnaných neznámých* zjistíme podle vztahů v kap. 4.2.1. Střední chyba funkce vyrovnaných neznámých je vyjádřena rovnicí

$$m_F^2=m_0^2\mathbf{F}^T\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{F} \tag{4.4.9}$$

která je rozepsaná pod čarou*).

Kontrolně následuje výpočet rovnic počínaje rov. (4.2.12) event. včetně sigmových zkoušek.

*) Je

$$m_F^2=m_0^2\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{xx_{11}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & Q_{xx_{22}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & Q_{xx_{kk}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial F}{\partial x_k}\end{pmatrix}=m_0^2\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}Q_{xx_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_k}Q_{xx_{kk}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial F}{\partial x_k}\end{pmatrix}$$

$$m_F^2=m_0^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 Q_{xx_{11}}+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 Q_{xx_{22}}+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2 Q_{xx_{kk}}\right]$$ a zavedením rov. (4.4.7) je a tedy

$$m_F^2=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}m_{dx_i}\right)^2$$ pro případ, že je matice $\mathbf{Q}_{xx}$ diagonální.

Vyrovnání podle zprostředkujících pozorování/měření je v současnosti metodou číslo jedna. Jak uvidíme v kap. 4.6, je možno libovolné úlohy vyrovnávacího počtu převést na tuto metodu. Proto jí bude i zde kladen upřednostněný význam.

JINÉ ODVOZENÍ PODMÍNKY MINIMA

Vyjděme z výrazu $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = min$, který derivujeme podle $\mathbf{v}$. Dostaneme $2\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a po dosazení 1. rov. (4.2.13) dostaneme $\mathbf{P}\left(\mathbf{A}x + \mathbf{L}\right) = \mathbf{0}$. Vynásobením zleva maticí $\mathbf{A}^T$ máme $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}x + \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{L} = \mathbf{0}$, což je shodně s rov. (4.4.3).

4.5 Zprostředkující pozorování s neznámými parametry a podmínková pozorování s neznámými parametry

Uveďme nejprve přehled vyrovnání, která souvisejí s případy, uvedenými v předchozím textu. Jsou, resp. byla:

- podmínková pozorování – kap. 4.3
- zprostředkující pozorování – kap. 4.4
- zprostředkující pozorování a podmínková pozorování – viz [13]
- podmínková pozorování s neznámými parametry – viz [13]
- zprostředkující pozorování s neznámými parametry – viz [13]
- podmínková pozorování s neznámými parametry a zprostředkující pozorování - viz[13]
- zprostředkující pozorování s neznámými parametry a podmínková pozorování - viz[13]

Proto v dalším textu se budeme věnovat zprostředkujícímu pozorování s neznámými parametry a podmínková pozorování s neznámými parametry. Tento postup představuje zobecnění MNČ, neboť je možno tohoto způsobu použít pro všechny druhy vyrovnání, která byla uvedena výše.

Dvěmi výchozími rovnicemi, jistěžě v maticovém tvaru, budou rovnice

$$\begin{aligned} &\underbrace{\mathbf{A}}_{n\times k}\underbrace{\mathbf{x}}_{k\times 1} + \underbrace{\mathbf{C}}_{n\times l}\underbrace{\mathbf{y}}_{l\times 1} + \underbrace{\mathbf{L}}_{n\times 1} = \underbrace{\mathbf{v}}_{n\times 1}, \quad \underbrace{\mathbf{P}}_{n\times n} = \underbrace{\mathbf{Q}^{-1}}_{n\times n} \\ &\underbrace{\mathbf{B}}_{r\times k}\underbrace{\mathbf{x}}_{k\times 1} + \underbrace{\mathbf{D}}_{r\times h}\underbrace{\mathbf{z}}_{h\times 1} + \underbrace{\mathbf{U}}_{r\times 1} = \underbrace{\mathbf{0}}_{r\times 1} \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

a jsou jimi podchyceny zprostředkující rovnice a podmínkové rovnice pro hledané neznámé $\mathbf{x}$ a neznámé parametry $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$. Matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ obsahují koeficienty při neznámých a vektory $\mathbf{L}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{U}$ obsahují absolutní členy, opravy a uzávěry. Počet rovnic oprav je *n*, počet podmínek *r*, počet hledaných neznámých je *k*, počet parametrů ve vektoru $\mathbf{y}$ je *l* a ve vektoru $\mathbf{z}$ je *h*.

Protože rov. (4.5.1) obsahují přidružené podmínky v 2. rov. (4.5.1) , je nutno opět použít Lagrangeova postupu pro zjištění minima. Za $\mathbf{v}$ ovšem dosadíme první rov. (4.5.1). Dostáváme vztah

$$\left(\underbrace{\mathbf{x}^T}_{1\times k}\underbrace{\mathbf{A}^T}_{k\times n} + \underbrace{\mathbf{y}^T}_{1\times l}\underbrace{\mathbf{C}^T}_{l\times n} + \underbrace{\mathbf{L}^T}_{1\times n}\right)\underbrace{\mathbf{P}}_{n\times n}\left(\underbrace{\mathbf{A}}_{n\times k}\underbrace{\mathbf{x}}_{k\times 1} + \underbrace{\mathbf{C}}_{n\times l}\underbrace{\mathbf{y}}_{l\times 1} + \underbrace{\mathbf{L}}_{n\times 1}\right) + 2\underbrace{\mathbf{k}^T}_{1\times r}\left(\underbrace{\mathbf{B}}_{r\times k}\underbrace{\mathbf{x}}_{k\times 1} + \underbrace{\mathbf{D}}_{r\times h}\underbrace{\mathbf{z}}_{h\times 1} + \underbrace{\mathbf{U}}_{r\times 1}\right) = min$$

který postupně derivujeme podle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ a $\mathbf{k}$. $\mathbf{k}$ je opět vektor korelát resp. Lagrangeových součinitelů. Dostaneme pak výslednou rovnici pro neznámé, která je

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}}_{(k+l+h+r)\times 1} = -\mathbf{Q}_{xx} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{PL} \\ \mathbf{C}^T\mathbf{PL} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}}_{(k+l+h+r)\times 1} \tag{4.5.2}$$

kde

$$\underbrace{\mathbf{Q}_{xx}}_{(k+l+h+r)\times(k+l+h+r)} = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{A}^T\mathbf{PA}}_{k\times k} & \underbrace{\mathbf{A}^T\mathbf{PC}}_{k\times l} & \underbrace{\mathbf{0}}_{k\times h} & \underbrace{\mathbf{B}^T}_{k\times r} \\ \underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{PA}}_{l\times k} & \underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{PC}}_{l\times l} & \underbrace{\mathbf{0}}_{l\times h} & \underbrace{\mathbf{0}}_{l\times r} \\ \underbrace{\mathbf{0}}_{h\times k} & \underbrace{\mathbf{0}}_{h\times l} & \underbrace{\mathbf{0}}_{h\times h} & \underbrace{\mathbf{D}^T}_{h\times r} \\ \underbrace{\mathbf{B}}_{r\times k} & \underbrace{\mathbf{0}}_{r\times l} & \underbrace{\mathbf{D}}_{r\times h} & \underbrace{\mathbf{0}}_{r\times r} \end{pmatrix}^{-1} \tag{4.5.3}$$

je matice váhových součinitelů. Poté se vypočte střední jednotková chyba m_0 z výrazu

$$m_0^2 = \mathbf{v}^T\mathbf{Pv}/(n+r-k-l-h)$$

a střední chyby neznámých a korelát z výrazů

$$m_{xx_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{xx_{ii}}},\ m_{yy_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{yy_{ii}}},\ m_{zz_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{zz_{ii}}},\ m_{kk_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{kk_{ii}}}.$$

kde výrazy pod odmocninami jsou prvky na hlavní diagonále matice $\mathbf{Q}_{xx}$.

Všechny tyto výše uvedené úlohy vyrovnání MNČ je možno nahradit úlohou jedinou, a to úlohou danou rov. (4.5.1): zprostředkující pozorování s neznámými parametry plus podmínková pozorování s neznámými parametry. Způsob řešení pozůstává v tom, že bychom prostě vynechali výrazy v rov. (4.5.1) až (4.5.3), jež se v zadané úloze neuvažují.

4.6 Zprostředkující pozorování s neznámými parametry a podmínková pozorování s neznámými parametry převedením podmínkových pozorování na zprostředkující

Tato kapitola je dovršením části IV. o vyrovnávacím počtu a představuje zobecnění předchozích kapitol. Jinými slovy: vše, co bylo uvedeno ve všech předchozích částech, kapitolách a odstavcích, bylo a je odvoditelné z teorie kap. 4.6, jako její zvláštní případy. Rovněž tak tomu bylo i v kap. 4.5. Zde navíc jde o použití pouze pozorování zprostředkujících. Jsou proto výchozími rovnicemi rov. (4.5.1) o počtu n měření, k hledaných neznámých, l neznámých parametrů, viz 1. rov. (4.5.1), a o počtu r přidružených podmínek s h neznámými parametry mezi hledanými neznámými $\mathbf{x}$, viz 2. rov. (4.5.1). MNČ by tedy vyžadovala Lagrangeovo vyjádření minima, např. rov. (4.3.4). Náhodné opravy $\mathbf{v}$ jsou však obsaženy pouze v 1. rov. (4.5.1). Abychom vyhověli oběma těmto požadavkům budeme postupovat tak, že nejprve se zbavíme podmínkových rovnic, tj. 2. rov. (4.5.1), a to převedením na zprostředkující a poté budeme řešit tyto převedené zprostředkující společně s původními zprostředkujícími, viz 1. rov. (4.5.1). Za tímto účelem přepíšeme rov. (4.5.1) do tvarů

$$\underbrace{\mathbf{A}_1}_{n\times r}\underbrace{\mathbf{x}_1}_{r\times 1} + \underbrace{\mathbf{A}_2}_{n\times(k-r)}\underbrace{\mathbf{x}_2}_{(k-r)\times 1} + \underbrace{\mathbf{C}}_{n\times l}\underbrace{\mathbf{y}}_{l\times 1} + \underbrace{\mathbf{L}}_{n\times 1} = \underbrace{\mathbf{v}}_{n\times 1} \tag{4.6.1}$$

$$\underbrace{\mathbf{F}_1}_{r\times r}\underbrace{\mathbf{x}_1}_{r\times 1} + \underbrace{\mathbf{F}_2}_{r\times(k-r)}\underbrace{\mathbf{x}_2}_{(k-r)\times 1} + \underbrace{\mathbf{D}}_{r\times h}\underbrace{\mathbf{z}}_{h\times 1} + \underbrace{\mathbf{U}}_{r\times 1} = \underbrace{\mathbf{0}}_{r\times 1} \tag{4.6.2}$$

kde $\mathbf{x}_1$ je vektor o r neznámých a vektor $\mathbf{x}_2$ o n - r neznámých. Dále $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ jsou opětně vektory s neznámými parametry, $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$ jsou matice koeficientů při neznámých ve vektorech $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ jsou matice koeficientů při neznámých parametrech $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$. $\mathbf{L}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{U}$ jsou vektory absolutních členů, náhodných oprav a uzávěrů přidružených podmínkových rovnic. Abychom učinili první krok k výše naznačenému řešení, je nutné odstranit podmínkové rov. (4.6.2). Proto ji vynásobíme inverzní maticí $\mathbf{F}_1^{-1}$ a získáme

$$\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{F}_1\mathbf{x}_1 = -\mathbf{F}_1^{-1}\left(\mathbf{F}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{U}\right)$$

z čehož

$$\underbrace{\mathbf{x}_1}_{r\times 1} = -\underbrace{\mathbf{F}_1^{-1}}_{r\times r}\left(\underbrace{\mathbf{F}_2}_{r\times(k-r)}\underbrace{\mathbf{x}_2}_{(k-r)\times 1} + \underbrace{\mathbf{D}}_{r\times h}\underbrace{\mathbf{z}}_{h\times 1} + \underbrace{\mathbf{U}}_{r\times 1}\right) \tag{4.6.3}$$

které dosadíme do rov. (4.6.1). Dostáváme

$$\begin{gathered} -\mathbf{A}_1\mathbf{F}_1^{-1}\left(\mathbf{F}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{U}\right) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{L} = \mathbf{v} \\ \left(-\mathbf{A}_1\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{F}_2 + \mathbf{A}_2\right)\mathbf{x}_2 + \mathbf{C}\mathbf{y} - \mathbf{A}_1\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{D}\mathbf{z} - \mathbf{A}_1\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{U} + \mathbf{L} = \mathbf{v} \end{gathered} \tag{4.6.4}$$

čímž máme co do činění pouze a jen se soustavou zprostředkujících rovnic. Pro zvýšení názornosti zavedeme

$$\underbrace{\mathcal{A}}_{n\times(k-r)} = -\underbrace{\mathbf{A}_1}_{n\times r}\underbrace{\mathbf{F}_1^{-1}}_{r\times r}\underbrace{\mathbf{F}_2}_{r\times(k-r)} + \underbrace{\mathbf{A}_2}_{n\times(k-r)}, \quad \underbrace{\mathcal{D}}_{n\times h} = -\underbrace{\mathbf{A}_1}_{n\times r}\underbrace{\mathbf{F}_1^{-1}}_{r\times r}\underbrace{\mathbf{D}}_{r\times h}, \quad \underbrace{\mathcal{L}}_{n\times 1} = -\underbrace{\mathbf{A}_1}_{n\times r}\underbrace{\mathbf{F}_1^{-1}}_{r\times r}\underbrace{\mathbf{U}}_{r\times 1} + \underbrace{\mathbf{L}}_{n\times 1} \tag{4.6.5}$$

Rov. (4.6.4) pak přejde v tvar

$$\underbrace{\mathcal{A}}_{n\times(k-r)}\underbrace{\mathbf{x}_2}_{(k-r)\times 1} + \underbrace{\mathbf{C}}_{n\times l}\underbrace{\mathbf{y}}_{l\times 1} + \underbrace{\mathcal{D}}_{n\times h}\underbrace{\mathbf{z}}_{h\times 1} + \underbrace{\mathcal{L}}_{n\times 1} = \underbrace{\mathbf{v}}_{n\times 1} \qquad \underbrace{\mathbf{P}}_{n\times n} = \underbrace{\mathbf{Q}_1^{-1}}_{n\times n} \tag{4.6.6}$$

Podmínka minima bude mít tvar $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = min$, jde totiž již jen o zprostředkující pozorování. Po zavedení rov. (4.6.6) zní

$$\left(\mathbf{x}_2^T\mathcal{A}^T + \mathbf{y}^T\mathbf{C}^T + \mathbf{z}^T\mathcal{D}^T + \mathcal{L}^T\right)\mathbf{P}\left(\mathcal{A}\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{C}\,\mathbf{y} + \mathcal{D}\,\mathbf{z} + \mathcal{L}\right) = min$$

a po vynásobení je

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_2^T\mathcal{A}^T\mathbf{P}\,\mathcal{A}\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}^T\mathbf{C}^T\mathbf{P}\,\mathcal{A}\,\mathbf{x}_2 + \mathbf{z}^T\mathcal{D}^T\mathbf{P}\,\mathcal{A}\,\mathbf{x}_2 + \mathcal{L}^T\mathbf{P}\,\mathcal{A}\,\mathbf{x}_2 + \\ &+\mathbf{x}_2^T\mathcal{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{C}\,\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{C}^T\mathbf{P}\,\mathbf{C}\,\mathbf{y} + \mathbf{z}^T\mathcal{D}^T\mathbf{P}\,\mathbf{C}\,\mathbf{y} + \mathcal{L}^T\mathbf{P}\,\mathbf{C}\,\mathbf{y} + \\ &+\mathbf{x}_2^T\mathcal{A}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D}\,\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{C}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D}\,\mathbf{z} + \mathbf{z}^T\mathcal{D}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D}\,\mathbf{z} + \mathcal{L}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D}\,\mathbf{z} + \\ &+\mathbf{x}_2^T\mathcal{A}^T\mathbf{P}\,\mathcal{L} + \mathbf{y}^T\mathbf{C}^T\mathbf{P}\,\mathcal{L} + \mathbf{z}^T\mathcal{D}^T\mathbf{P}\,\mathcal{L} + \mathcal{L}^T\mathbf{P}\,\mathcal{L} = min \end{aligned}$$

Nyní postupně derivujeme podle proměnných $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, derivace položíme rovny nule a opět při $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
\partial/\partial \mathbf{x}_2 :&\ \underbrace{\mathcal{A}^T\mathbf{P}\mathcal{A}}_{(\mathbf{k-r})\times(k-r)}\ \underbrace{\mathbf{x}_2}_{(k-r)\times 1} + \underbrace{\mathcal{A}^T\mathbf{P}\mathbf{C}}_{(\mathbf{k-r})\times l}\underbrace{\mathbf{y}}_{l\times 1} + \underbrace{\mathcal{A}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D}}_{(\mathbf{k-r})\times h}\ \underbrace{\mathbf{z}}_{\mathbf{h\times 1}} + \underbrace{\mathcal{A}^T\mathbf{P}\mathcal{L}}_{(\mathbf{k-r})\times 1} = \underbrace{\mathbf{0}_{x_2}}_{(k-r)\times 1} \\
\partial/\partial \mathbf{y} :&\ \underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathcal{A}}_{l\times(\mathbf{k-r})}\ \underbrace{\mathbf{x}_2}_{(k-r)\times 1} + \underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathbf{C}}_{l\times l}\underbrace{\mathbf{y}}_{l\times 1} + \underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D}}_{l\times h}\ \underbrace{\mathbf{z}}_{\mathbf{h\times 1}} + \underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathcal{L}}_{l\times 1} = \underbrace{\mathbf{0}_y}_{l\times 1} \qquad (4.6.7) \\
\partial/\partial \mathbf{z} :&\ \underbrace{\mathcal{D}^T\mathbf{P}\mathcal{A}}_{\mathbf{h}\times(\mathbf{k-r})}\ \underbrace{\mathbf{x}_2}_{(k-r)\times 1} + \underbrace{\mathcal{D}^T\mathbf{P}\mathbf{C}}_{\mathbf{h}\times l}\underbrace{\mathbf{y}}_{l\times 1} + \underbrace{\mathcal{D}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D}}_{\mathbf{h\times h}}\ \underbrace{\mathbf{z}}_{\mathbf{h\times 1}} + \underbrace{\mathcal{D}^T\mathbf{P}\mathcal{L}}_{h\times 1} = \underbrace{\mathbf{0}_z}_{h\times 1}
\end{aligned}
$$

což jsou normální rovnice v tvaru maticového počtu. Zavedeme

$$
\underbrace{\mathbf{N}}_{(k+l+h-r)\times(k+l+h-r)} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^T\mathbf{P}\mathcal{A} & \mathcal{A}^T\mathbf{P}\,\mathbf{C} & \mathcal{A}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D} \\ \mathbf{C}^T\mathbf{P}\,\mathcal{A} & \mathbf{C}^T\mathbf{P}\,\mathbf{C} & \mathbf{C}^T\,\mathbf{P}\,\mathcal{D} \\ \mathcal{D}^T\mathbf{P}\mathcal{A} & \mathcal{D}^T\mathbf{P}\,\mathbf{C} & \mathcal{D}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D} \end{pmatrix} \qquad (4.6.8)
$$

$$
\mathbf{Q}_{xx} = \underbrace{\mathbf{N}^{-1}}_{(k+l+h-r)\times(k+l+h-r)} \qquad (4.6.9)
$$

takže neznámé zjistíme z rovnice

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}}_{(k+l+h-r)\times 1} = \underbrace{-\mathbf{Q}_{xx}\begin{pmatrix} \mathcal{A}^T\mathbf{P}\mathcal{L} \\ \mathbf{C}^T\mathbf{P}\,\mathcal{L} \\ \mathcal{D}^T\mathbf{P}\mathcal{L} \end{pmatrix}}_{(k+l+h-r)\times 1} \qquad (4.6.10)
$$

Vektor $\mathbf{x}_1$ zbývajících hledaných neznámých určíme z rov. (4.6.3), náhodné opravy z rov. (4.6.1) nebo (4.6.6) a střední jednotkovou chybu z tvaru $m_0^2 = \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}/(n+r-k-l-h)$. Střední chyby jednotlivých neznámých vektorů $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ opětně určíme podle známého předpisu

$$
m_{xx2_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{xx2_{ii}}} \qquad m_{yy_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{yy_{ii}}} \qquad m_{zz_{ii}} = m_0\sqrt{Q_{zz_{ii}}}
$$

kde $Q_{xx2_{ii}}$, $Q_{yy_{ii}}$, $Q_{zz_{ii}}$ jsou prvky na hlavní diagonále matice $\mathbf{Q}_{xx}$. Zde je nedostatkem, že nezískáme přímo $Q_{xx1_{ii}}$ pro hledané neznámé vektoru $\mathbf{x}_1$. Kontrolami jsou rov. (4.2.12) až (4.2.14). Konečně musí platit i rov. (4.6.10), (4.6.1) a (4.6.2). Tím je výpočet ukončen.

Postup výpočtu. Vstupními veličinami jsou: $\underbrace{\mathbf{A}_1}_{n\times r}$, $\underbrace{\mathbf{A}_2}_{n\times(k-r)}$, $\underbrace{\mathbf{C}}_{n\times l}$, $\underbrace{\mathbf{L}}_{n\times 1}$, $\underbrace{\mathbf{F}_1}_{r\times r}$, $\underbrace{\mathbf{F}_2}_{r\times(k-r)}$, $\underbrace{\mathbf{D}}_{r\times h}$, $\underbrace{\mathbf{U}}_{r\times 1}$, viz rov. (4.6.1), (4.6.2) a PŘÍKLAD 16 v kap. 5.3. Poté již následuje výpočet $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$ v rov. (4.6.5), submatice $\underbrace{\mathcal{A}^T\mathbf{P}\mathcal{A}}_{(k-r)\times(k-r)},\dots,\underbrace{\mathcal{D}^T\mathbf{P}\,\mathcal{D}}_{h\times h}$ pro rov. (4.6.8), čímž získáme matice $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Q}_{xx}$, rov. (4.6.8) i rov. (4.6.9) a konečně neznámé z rov. (4.6.10) po výpočtu subvektorů $\underbrace{\mathcal{A}^T\mathbf{P}\mathcal{L}}_{(k-r)\times 1}$, $\underbrace{\mathbf{C}^T\mathbf{P}\mathcal{L}}_{l\times 1}$ a $\underbrace{\mathcal{D}^T\mathbf{P}\mathcal{L}}_{h\times 1}$. Další již uvádí text za rov. (4.6.10).

Rov. (4.6.7) až (4.6.10) plně nahrazují veškeré případy vyrovnání, uvedené v předchozím textu, včetně základních metod vyrovnání v kap. 4.3 a 4.4. Navíc je možno vše převést na vyrovnání zprostředkujících pozorování. Bude-li např. scházet vektor $\mathbf{y}$, resp. $\mathbf{z}$, resp. oba vektory, pak odpadá 2. řádek a 2. sloupec rov. (4.6.7), resp. 3. řádek a 3. sloupec rov. (4.6.7), resp. 2. i 3. řádek a 2. i 3. sloupec rov. (4.6.7).

4.7 Závěrem stručné, ale zásadní porovnání metody zprostředkujících a metody podmínkových pozorování, především s ohledem na vyrovnání geodetických sítí

Zprostředkující pozorování

Přednosti	**Nedostatky**
Jednoduchost a přehlednost při při sestavování rovnic oprav.	Závislost na zavedené souřadnicové soustavě.
Všeobecně zavedení jejich použití, především pro možnost automatizece výpočtů.	Počet normálních rovnic je obvykle větší než u podmínkových pozorování.

Podmínková pozorování

Přednosti	**Nedostatky**
Nezávislost na zavedené souřadnicové soustavě.	Často velmi obtížné sestavení potřebného počtu podmínkových rovnic.
Obvykle menší počet normálních rovnic.	Obtížná automatizace výpočtů.

LITERATURA:

[1] Gauss K. B.: Theoria motus corporum coelestium. 1809.
[2] Legendre A. M.: Nouvelle méthodes pour la détermination des orbites des cométes. Appendice: Sur la méthode des moindres carrés. Paris 1806.
[3] Laplace P. S.: Théorie analytique des probabilités. Paris 1812.
[4] Čuřík F.: Počet vyrovnávací … . Nákladem ČMT, Praha 1936.
[5] Müller F., Novotný F.: Geodézie vyšší. Praha 1913.
[6] Semerád A.: Příručka praktické geometrie. Praha 1921.
[7] Láska V.: Počtářství geodetické. Praha 1894.
[8] Čechura F.: Důlní měřictví I, počet vyrovnávací). Praha 1948.
[9] Ryšavý J.: Vyšší geodesie. Nakladatelství ČMT, Praha 1947.
[10] Fiala F.: Geodetické počtářství I., II. a III. běh. Komise při ČVUT, Praha 1938.
[11] Wolf H.: Ausgleichungsrechnung – Formeln zur praktischen Anwendung. Dümler Verlag, Bonn 1975.
[12] Böhm J., Radouch V., Hampacher M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. Vydal Geodetický a kartografický podnik, Praha 1990.
[13] Kabeláč J.: Geodetické metody vyrovnání – metoda nejmenších čtverců. Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň 2004.