

6 Trojrozměrná geodézie – 3D

6.1 Teoretické základy 3D geodézie

6.1.1 Úvod

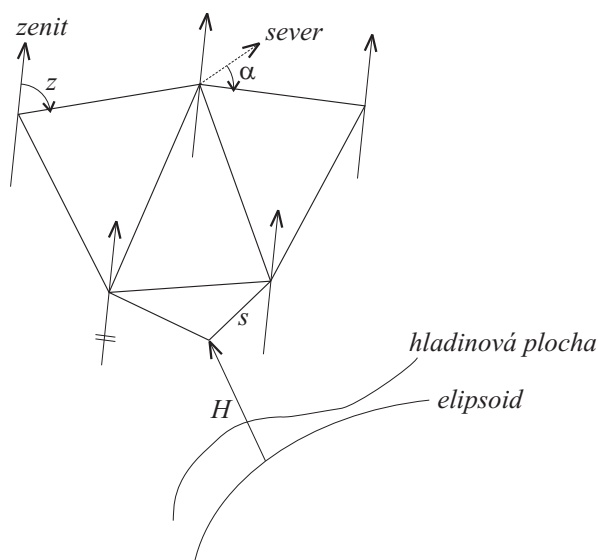
Trojrozměrná geodézie má svůj původ v práci H. Brunse z r. 1878 „Die Figur der Erde, ein Beitrag zur europäischen Gradmessung“. Jejím cílem je určení pravoúhlých prostorových souřadnic x, y, z libovolného bodu povrchu Země v systému, jehož počátkem je těžiště Země. V témže systému vyjadřuje i směry. K tomuto účelu mají sloužit veškerá klasická i moderní měření: úhlová, délková, nivelační měření, měření tíhová, dále hvězdná triangulace, měření na Měsíc, na umělé družice Země (UDZ) a měření na vzdálené mimogalaktické objekty.

Zde uvedená měření lze dělit do tří skupin:

- 1) statistická měření – obvyklá měření,
- 2) kinetická měření – sledující změny,
- 3) dynamická měření – sledující příčiny změn.

Též možno říci, že geodetická měření slouží především k určení rozměru a tvaru, astronomická k orientaci a tíhová k definování vztahné plochy.

I když klasická geodézie používala též tři rozměry, záměrně oddělovala – na rozdíl od trojrozměrné geodézie – měření polohopisná a měření výšková, a to tím způsobem, že polohopisné úlohy řešila na referenční ploše, výškopis pak mimo ni. Zatímco polohová měření byla vztažena k ploše geometrické, výšková k ploše hladinové – tedy definované fyzikálně. Dalším nedostatkem bylo to, že naměřené údaje, např. při stupňových měřeních, bylo nutno redukovat určitým způsobem na plochu referenční – již byl obvykle rotační elipsoid – leč tato plocha má být výsledkem měření.



Obr. 6.1.1

Trojrozměrná geodézie má uvedené nedostatky odstranit či alespoň zásadně potlačit. Bruns ideu prostorové triangulace demonstruje na polyedru, obr. 6.1.1, jehož vrcholy jsou trigonometrické body prostorové sítě. Veličiny, vázané na směr tíže (azimut, zenitová vzdálenost) jsou vztaženy ke svislicím v těchto bodech, jejichž směr je dán zeměpisnou šířkou

astronomickou a zeměpisnou délkou astronomickou. Další veličiny jsou invariantní délka hran polyedru a refrakční koeficienty. V tomto modelu je možno provádět libovolné početní operace a tak řešit úlohy geodézie. Pro redukci – která již ovšem nemá význam redukce klasické geodézie – přistupují geopotenciální kóty a pro řešení geocentricity systému – hodnoty tíže. I když základy trojrozměrné geodézie byly položeny Brunsem v předminulém století, uplatňuje se tato disciplína prakticky teprve až v současné době, a to především proto, že dochází k použití samočinných počítačů, které usnadňují velice zdoluhavé a obsažné výpočty, které jsou typické pro trojrozměrnou geodézii a jsou jejím nedostatkem oproti klasické.

Dále byly rozpracovány některé teoretické problémy především pracemi, které uveřejnili Moloděnský, Hotine, Marussi, Dufour a v současnosti další. Z našich pracovníků uveďme Hradilka.

Trojrozměrná pozemní geodézie je harmonickým protějškem družicové geodézie. Definice veličin, výpočetní postupy, souřadnicové systémy a i celkové pojetí úloh je velmi podobné. Proto jednou z příčin vzestupu trojrozměrné prostorové geodézie je rovněž použití UDZ pro účely řešení geodetických úloh.

V současné době existují již speciální studijní skupiny Mezinárodní geodetické a geofyzikální unie, jejichž úkolem jsou studie i praktická měření v oboru trojrozměrné pozemní i družicové triangulace a jejich nejhodnější spojení. Programem těchto skupin je:

- 1) Systematický průzkum možností určování pozemních sítí pomocí souřadnic, vzdáleností a směrů získaných z družicových sítí. Numerický průzkum na sférických modelech a propojení světových, kontinentálních, národních a místních sítí.
- 2) Vypracovat praktické návrhy pro zpevnění kontinentálních a národních sítí včetně studia přesnosti.
- 3) Systematický výzkum možností doplnění družicových sítí pro velká území včetně světové, pomocí pozemních měření.
- 4) Vypracovat praktické návrhy světové a kontinentálních družicových sítí^{*)}.
- 5) Návrhy pro společné vyrovnání pozemních a družicových naměřených dat^{*)}.

Úkolem této kap. 6 „Trojrozměrná geodézie – 3D“ je přispět především k řešení problematiky pozemních prostorových sítí, aby tak co nejhodněji charakterem měřické a výpočetní metodiky navazovaly na družicové sítě.

Dříve než přistoupíme k řešení konkrétních problémů, které jsou předmětem následujících kapitol, uvedeme v této první odvození zprostředkujících rovnic oprav pro vyrovnání prostorové sítě. Podmínková měření přistoupí později.

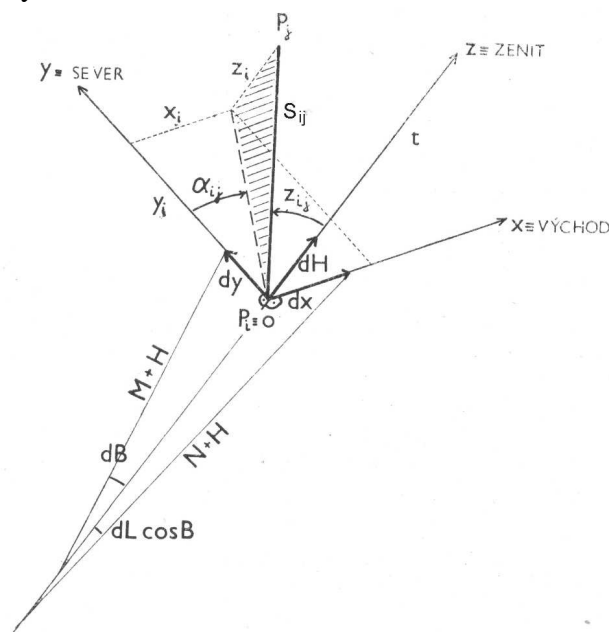
6.1.2 Teoretické základy trojrozměrné geodézie

Trojrozměrná geodézie používá měřených geodetických veličin: vodorovný směr a nebo vodorovný úhel ω , zenitová vzdálenost z a délka spojnice s ; odvozených geodetických veličin: šířka B , délka L (kladná na východ) a elipsoidická výška H ; měřených astronomických veličin: šířka φ , délka λ (kladná na východ) a azimut α . Je-li měřena zenitová vzdálenost, je nutno určovat i refrakční koeficient R . Pro delší záměry je nutno ji nahradit údaji výškovými (získanými z nivelačních měření) a astronomicko-geodetickými. Úkolem

^{*)} Překonáno a pokračuje se.

geodetických veličin je určit velikost a tvar zaměřované sítě. Úkolem astronomických veličin pak její orientaci vůči hvězdám, tj. vůči rotační ose Země (zajišťuje φ a λ) a vůči základnímu poledníku (zajišťuje λ). Hledanými, výslednými veličinami jsou opravy geodetických a astronomických veličin, rov. (6.1.28).

Zde uvedený text vychází z [4], i když existuje řada prací dalších, modernějších. Z nich uveďme aspoň [2], který vyvozuje rovnice oprav přímo z měřených dat, bez použití souřadnic rovníkového systému, viz dále.



Obr. 6.1.1

6.1.2.1 Souřadnicové systémy a základní vztahy

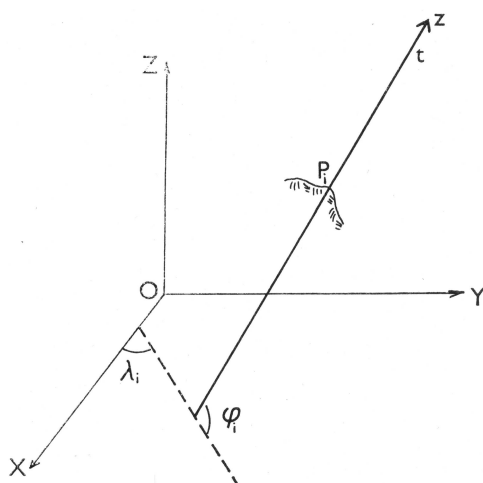
Nejprve definujeme pravouhý souřadnicový systém obzorníkový $s = o(x, y, z)$, jehož počátek volíme v bodě P_i , který leží na topografickém povrchu Země, obr. 6.1.2. Osa z je totožná se svislicí a směřuje k zenitu bodu P_i , osa y směřuje k astronomickému severu a osa x k astronomickému východu. Osy x, y leží v obzorníkové rovině, tečné k hladinové ploše v bodě P_i . Dále zvolíme bod P_j , jehož pravouhlé souřadnice v systému s jsou

$$x_j = s_{ij} \sin z_{ij} \sin \alpha_{ij}, \quad y_j = s_{ij} \sin z_{ij} \cos \alpha_{ij}, \quad z_j = s_{ij} \cos z_{ij}, \quad (6.1.1)$$

kde s_{ij} je délka spojnice $P_i P_j$, z_{ij} její zenitová vzdálenost měřená z bodu P_i na bod P_j a α_{ij} astronomický azimut téže spojnice, měřený od astronomického severu kladně na východ.

Dále definujeme pravouhý souřadnicový systém rovníkový $S = O(X, Y, Z)$, obr. 6.1.3, jehož počátek O leží ve středu referenčního elipsoidu, použitého pro danou geodetickou síť. Osa Z je totožná s malou osou elipsoidu a směřuje na sever, osa X leží v průsečnici základního geodetického poledníku s geodetickým rovníkem a osa Y leží rovněž v rovině geodetického rovníku a má $L = 90^\circ$. Souřadnice bodů P_i a P_j v rovníkovém systému S označíme $(X, Y, Z)_i$ a $(X, Y, Z)_j$. Mezi souřadnicemi systémů s a S platí vztahy

$$(x_j, y_j, z_j)^T = \mathbf{R} (X_j - X_i, Y_j - Y_i, Z_j - Z_i)^T, \quad (6.1.2)$$



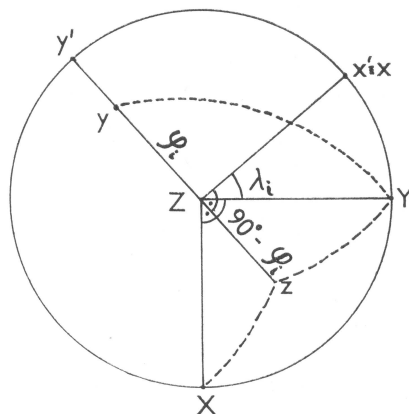
Obr. 6.1.1

kde index T značí transponované matice. Matice rotace \mathbf{R} v obecném tvaru zní

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos xX & \cos xY & \cos xZ \\ \cos yX & \cos yY & \cos yZ \\ \cos zX & \cos zY & \cos zZ \end{pmatrix} \quad (6.1.3)$$

kde xX, \dots značí úhly sevřené osami x a X, \dots . Označme φ_i, λ_i astronomické souřadnice bodu P_i . Na obr. 6.1.4 představují body X, Y, Z průsečíky odpovídajících os s jednotkovou sférou. Systém rovníkový S otočíme nejprve o úhel $90^\circ + \lambda_i$ kolem osy Z , takže osy X, Y přejdou do poloh x', y' . Dále osy y', Z otočíme o úhel $90^\circ - \varphi_i$ kolem osy x' , čímž přejdeme do obzorníkového systému s . Kosiny úhlů xX, \dots v rov. (6.1.3) získáme ze sférických trojúhelníků o vrcholech x, X, Z, \dots , viz obr. 6.1.4. Po dosazení rov. (6.1.3) do (6.1.2) pak dostaneme

$$\begin{aligned} x_j &= -(X_j - X_i)\sin \lambda_i + (Y_j - Y_i)\cos \lambda_i, \\ y_j &= -(X_j - X_i)\sin \varphi_i \cos \lambda_i - (Y_j - Y_i)\sin \varphi_i \sin \lambda_i + (Z_j - Z_i)\cos \varphi_i, \\ z_j &= (X_j - X_i)\cos \varphi_i \cos \lambda_i + (Y_j - Y_i)\cos \varphi_i \sin \lambda_i + (Z_j - Z_i)\sin \varphi_i, \end{aligned} \quad (6.1.4)$$



Obr. 6.1.2

příčemž

$$s_{ij}^2 = (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2, \quad (6.1.5)$$

Podle obr. 6.1.2 platí pro astronomický azimut a zenitovou vzdálenost vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha_{ij} = \frac{x_j}{y_j}, \quad \cos z_{ij} = \frac{z_j}{s_{ij}}.$$

Po dosazení rov. (6.1.4) a (6.1.5) dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha_{ij} = \frac{-(X_j - X_i) \sin \lambda_i + (Y_j - Y_i) \cos \lambda_i}{-(X_j - X_i) \sin \varphi_i \cos \lambda_i - (Y_j - Y_i) \sin \varphi_i \sin \lambda_i + (Z_j - Z_i) \cos \varphi_i}, \quad (6.1.6)$$

$$\cos z_{ij} = \frac{(X_j - X_i) \cos \varphi_i \cos \lambda_i + (Y_j - Y_i) \cos \varphi_i \sin \lambda_i + (Z_j - Z_i) \sin \varphi_i}{\left[(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2 \right]^{1/2}}, \quad (6.1.7)$$

kteří společně s rov. (6.1.5) podávají základní vztahy trojrozměrné geodézie podle teorie uvedené v [1].

Připomeňme však, že počátek O není totožný s těžištěm Země a osy X, Y, Z jsou vůči odpovídajícím osám astronomického systému stočeny o malé úhly, které mají příčinu v hromadění systematických chyb triangulačních měření. Jestliže bychom chtěli použít rov. (6.1.4), (6.1.6) a (6.1.7) pro společné vyrovnání s měřeními družicovými nebo kosmickými^{*)}, bylo by nutno k těmto rovnicím, jakož i k dále uvedeným rovnicím oprav připojit opravné členy z neparalelnosti odpovídajících si os a z netotožnosti počátku O a těžiště Země, případně zavést nové neznámé, [1].

Odvození diferenciálů neznámých veličin v rovníkovém systému

Dříve než budou sestaveny zprostředkující rovnice oprav, je nutno rov. (6.1.5), (6.1.6) a (6.1.7) linearizovat. Bude platit

$$d\alpha_{ij} = \sum_j \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial J} dJ, \quad dz_{ij} = \sum_j \frac{\partial z_{ij}}{\partial J} dJ, \quad ds_{ij} = \sum_j \frac{\partial s_{ij}}{\partial J} dJ, \quad (6.1.8)$$

kde dJ jsou hledané neznámé opravy jednak souřadnic, $J = X_i, Y_i, Z_i, X_j, Y_j$ a Z_j , jednak měřených veličin, $J = \varphi_i$ a λ_i .

Odvození diferenciálu $d\alpha_{ij}$ astronomického azimutu α_{ij}

Z tvaru rov. (6.1.6) vyplývá

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial X_i} = -\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial X_j}, \quad \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Y_i} = -\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Y_j}, \quad \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Z_i} = -\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Z_j},$$

proto odvodíme parciální derivace pouze pro veličiny s indexem i . S použitím rov. (6.1.4) a (6.1.1) platí, že

^{*)} Např. laserová měření na Měsíc apod.

$$\begin{aligned}
-A_{ij}^{(1)} &\equiv \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial X_i} = \cos^2 \alpha_{ij} \left(\frac{\sin \lambda_i}{y_i} - \frac{x_j \sin \varphi_i \cos \lambda_i}{y_j^2} \right) = \\
&= \frac{1}{s_{ij} \sin z_{ij}} (\sin \lambda_i \cos \alpha_{ij} - \sin \varphi_i \cos \lambda_i \sin \alpha_{ij}), \\
-A_{ij}^{(2)} &\equiv \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Y_i} = \frac{1}{s_{ij} \sin z_{ij}} (-\cos \lambda_i \cos \alpha_{ij} - \sin \varphi_i \sin \lambda_i \sin \alpha_{ij}), \\
-A_{ij}^{(3)} &\equiv \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Z_i} = \frac{\cos \varphi_i \sin \alpha_{ij}}{s_{ij} \sin z_{ij}}, \\
A_{ij}^{(4)} &\equiv \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varphi_i} = \sin \alpha_{ij} \cos z_{ij}, \\
A_{ij}^{(5)} &\equiv \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \lambda_i} = \sin \varphi_i - \cos \varphi_i \cos \alpha_{ij} \cotg z_{ij}.
\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Podle rov. (6.1.8), s užitím pomocných symbolů A_{ij} , má diferenciál $d\alpha_{ij}$ astronomického azimutu tvar

$$d\alpha_{ij} = A_{ij}^{(1)}(dX_j - dX_i) + A_{ij}^{(2)}(dY_j - dY_i) + A_{ij}^{(3)}(dZ_j - dZ_i) + A_{ij}^{(4)}d\varphi_i + A_{ij}^{(5)}d\lambda_i. \tag{6.1.10}$$

Odvození diferenciálu dz_{ij} zenitové vzdálenosti z_{ij}

Z tvaru rov. (6.1.7) je patrné, že platí

$$\frac{\partial z_{ij}}{\partial X_i} = -\frac{\partial z_{ij}}{\partial X_j}, \quad \frac{\partial z_{ij}}{\partial Y_i} = -\frac{\partial z_{ij}}{\partial Y_j}, \quad \frac{\partial z_{ij}}{\partial Z_i} = -\frac{\partial z_{ij}}{\partial Z_j}.$$

Proto opět odvodíme parciální derivace pouze pro veličiny s indexem i . S použitím rov. (6.1.4) a (6.1.1) dostaneme parciálním derivováním rov. (6.1.7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_{ij}}{\partial X_i} &= \frac{s_{ij} \cos \varphi_i \cos \lambda_i - (X_j - X_i) \cos z_{ij}}{s_{ij}^2 \sin z_{ij}}, \\
\frac{\partial z_{ij}}{\partial Y_i} &= \frac{s_{ij} \cos \varphi_i \sin \lambda_i - (Y_j - Y_i) \cos z_{ij}}{s_{ij}^2 \sin z_{ij}}, \\
\frac{\partial z_{ij}}{\partial Z_i} &= \frac{s_{ij} \sin \varphi_i - (Z_j - Z_i) \cos z_{ij}}{s_{ij}^2 \sin z_{ij}}.
\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Abychom vyloučili rozdíly rovníkových pravouhlých souřadnic, přepíšeme rov. (6.1.2) do tvaru

$$(X_j - X_i, Y_j - Y_i, Z_j - Z_i)^T = \mathbf{R}^{-1}(x_j, y_j, z_j)^T,$$

kde \mathbf{R}^{-1} je inverzní matice k matici \mathbf{R} , rov. (6.1.2) a (6.1.3). Za x_j, y_j, z_j dosadíme z rov. (6.1.1) a dostaneme výrazy

$$\begin{aligned}
\frac{X_j - X_i}{s_{ij}} &= -\sin \lambda_i \sin \alpha_{ij} \sin z_{ij} - \sin \varphi_i \cos \lambda_i \cos \alpha_{ij} \sin z_{ij} + \\
&\quad + \cos \varphi_i \cos \lambda_i \cos z_{ij}, \\
\frac{Y_j - Y_i}{s_{ij}} &= \cos \lambda_i \sin \alpha_{ij} \sin z_{ij} - \sin \varphi_i \sin \lambda_i \cos \alpha_{ij} \sin z_{ij} + \\
&\quad + \cos \varphi_i \sin \lambda_i \cos z_{ij}, \\
\frac{Z_j - Z_i}{s_{ij}} &= \cos \varphi_i \cos \alpha_{ij} \sin z_{ij} + \sin \varphi_i \cos z_{ij},
\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

kteřé dosadíme do rov. (6.1.11) a po úpravě získáme

$$\begin{aligned}
-B_{ij}^{(1)} &\equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial X_i} = \frac{1}{s_{ij}} \left[(\sin \lambda_i \sin \alpha_{ij} + \sin \varphi_i \cos \lambda_i) \cos z_{ij} + \right. \\
&\quad \left. + \cos \varphi_i \cos \lambda_i \sin z_{ij} \right], \\
-B_{ij}^{(2)} &\equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial Y_i} = \frac{1}{s_{ij}} \left[(-\cos \lambda_i \sin \alpha_{ij} + \sin \varphi_i \sin \lambda_i \cos \alpha_{ij}) \cos z_{ij} + \right. \\
&\quad \left. + \cos \varphi_i \sin \lambda_i \sin z_{ij} \right], \\
-B_{ij}^{(3)} &\equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial Z_i} = \frac{1}{s_{ij}} (-\cos \varphi_i \cos \alpha_{ij} \cos z_{ij} + \sin \varphi_i \sin z_{ij}).
\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

Zbývající dvě parciální derivace, opět s užitím rov. (6.1.7), (6.1.4) a (6.1.1), jsou

$$\begin{aligned}
B_{ij}^{(4)} &\equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial \varphi_i} = -\cos \alpha_{ij}, \\
B_{ij}^{(5)} &\equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial \lambda_i} = -\cos \varphi_i \sin \alpha_{ij}.
\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

Po zavedení pomocných symbolů B_{ij} má diferenciál dz_{ij} zenitové vzdálenosti tvar, viz rov. (6.1.8),

$$dz_{ij} = B_{ij}^{(1)}(dX_j - dX_i) + B_{ij}^{(2)}(dY_j - dY_i) + B_{ij}^{(3)}(dZ_j - dZ_i) + B_{ij}^{(4)}d\varphi_i + B_{ij}^{(5)}d\lambda_i. \tag{6.1.14}$$

Odvození diferenciálu ds_{ij} délky spojnice s_{ij}

S použitím rov. (6.1.12) získáme jednoduše z rov. (6.1.5) parciální derivace

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{(1)} &\equiv \frac{\partial s_{ij}}{\partial X_j} = -\frac{\partial s_{ij}}{\partial X_i} = (-\sin \lambda_i \sin \alpha_{ij} - \sin \varphi_i \cos \lambda_i \cos \alpha_{ij}) \sin z_{ij} + \\
&\quad + \cos \varphi_i \cos \lambda_i \cos z_{ij},
\end{aligned} \tag{6.1.15}$$

$$C_{ij}^{(2)} \equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial Y_j} = -\frac{\partial z_{ij}}{\partial Y_i} = (\cos \lambda_i \sin \alpha_{ij} - \sin \varphi_i \sin \lambda_i \cos \alpha_{ij}) \sin z_{ij} + \\ + \cos \varphi_i \sin \lambda_i \cos z_{ij},$$

$$C_{ij}^{(3)} \equiv \frac{\partial z_{ij}}{\partial Z_j} = -\frac{\partial z_{ij}}{\partial Z_i} = \cos \varphi_i \cos \alpha_{ij} \sin z_{ij} + \sin \varphi_i \cos z_i.$$

S užitím pomocných symbolů C_{ij} má diferenciál ds_{ij} délky spojnice tvar, viz rov. (6.1.8)

$$ds_{ij} = C_{ij}^{(1)}(dX_j - dX_i) + C_{ij}^{(2)}(dY_j - dY_i) + C_{ij}^{(3)}(dZ_j - dZ_i). \quad (6.1.16)$$

Odvozených diferenciálů v rov. (6.1.10), (6.1.14) a (6.1.16) bychom použili pro sestavení rovnic oprav, jestliže bychom za neznámé, hledané veličiny považovali právě opravy dX_i, \dots, dZ_j pravoúhlých prostorových souřadnic v souřadnicové soustavě rovníkové a opravy $d\varphi_i, d\lambda_i$ bodů P_i a P_j . Ovšem s ohledem na odst. za rov. (6.1.7).

6.1.2.2 Vyjádření diferenciálů neznámých veličin v obzorníkovém systému

Často se však ukazuje výhodným diferenciály dX_i, \dots, dZ_j vyjádřit pomocí diferenciálů v systému obzorníkovém především již proto, že měření jsou konána právě v tomto systému. Při převodu se vychází ze známých vztahů pro výpočet pravoúhlých souřadnic X, Y, Z v referenčním geodetickém systému S . Platí (indexy i, j jsou vynechány)

$$X = (N + H) \cos B \cos L, \quad Y = (N + H) \cos B \sin L, \\ Z = (N + H - Ne^2) \sin B, \quad (6.1.17)$$

kde H je elipsoidická výška a $N = a(1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2}$ je příčný poloměr křivosti (a, e je hlavní poloosa a číselná výstřednost poledníkové elipsy daného referenčního rotačního elipsoidu). Rov. (6.1.17) derivujeme, diferenciály dX, dY, dZ vyjádříme pomocí diferenciálů dB, dL, dH a tyto ještě nahradíme diferenciály dx, dy v obzorníkové rovině, obr. 6.1.2. Diferenciál dH leží na svislici t , tedy v ose z , a proto jej ponecháme. Platí, obr. 6.1.2,

$$dx = (N + H) \cos B dL, \quad dy = (M + H) dB, \quad dz = dH. \quad (6.1.18)$$

Diferenciály dX, dY, dZ pak mají tvar

$$dX = -\sin L dx - \sin B \cos L dy + \cos B \cos L dH, \\ dY = \cos L dx - \sin B \sin L dy + \cos B \sin L dH, \\ dZ = \cos B dy + \sin B dH. \quad (6.1.19)$$

Po zavedení symbolů i, j do rov. (6.1.19) dostáváme

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_{ind} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}_{ind} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dH \end{pmatrix}_{ind},$$

kde mezi prvky čtvercové matice a koeficienty při neznámých diferenciálech dx, dy, dH v rov. (6.1.19) platí identita. Např.

$$(M_{11})_{ind} = -\sin L_{ind}, \text{ atd.},$$

kde $ind = i, j$. Nyní se vraťme k rov. (6.1.10), (6.1.14) a (6.1.16), které přepíšeme do společného vztahu. Zní

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dz \\ ds \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & A^{(3)} \\ B^{(1)} & B^{(2)} & B^{(3)} \\ C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{pmatrix}_{ij} \left[-\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_j \right] + \begin{pmatrix} A^{(4)} & A^{(5)} \\ B^{(4)} & B^{(5)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix}_i.$$

A platí pro záměru z bodu P_i na bod P_j , obr. 6.1.2. Význam symbolů $A_{ij}^{(1)}, \dots, C_{ij}^{(3)}$ udávají rov. (6.1.9), (6.1.13) a (6.1.15). Do této rovnice dosadíme předcházející a dostáváme

$$\begin{pmatrix} d\alpha \\ dz \\ ds \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & A^{(3)} \\ B^{(1)} & B^{(2)} & B^{(3)} \\ C^{(1)} & C^{(2)} & C^{(3)} \end{pmatrix}_{ij} \left[-\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dH \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dH \end{pmatrix}_j \right] + \begin{pmatrix} A^{(4)} & A^{(5)} \\ B^{(4)} & B^{(5)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \end{pmatrix}_i.$$

Kdybychom nyní provedli naznačení úlohy, dostáváme koeficienty při neznámých $dx_i, \dots, d\lambda_i$ a dx_j, dy_j, dH_j . Zaveďme

$$d\alpha_{ij} = \sum_{l=1}^8 a_{ij}^{(l)} dI, \quad dz_{ij} = \sum_{l=1}^8 b_{ij}^{(l)} dI, \quad ds_{ij} = \sum_{l=1}^6 c_{ij}^{(l)} dI, \quad (6.1.20)$$

kde dI jsou nové neznámé opravy vztahené k systému obzorníkovému. Jest $I = 1, 2, \dots, 8$, přičemž $1 = x_i, 2 = y_i, 3 = H_i, 4 = x_j, 5 = y_j, 6 = H_j, 7 = \varphi_i$ a $8 = \lambda_i^*$). Koeficienty pro totální diferenciál $d\alpha$ jsou

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= -\mathbf{A}_{ij} (M_{11} \ M_{21} \ M_{31})_i^T, & a_{ij}^{(4)} &= \mathbf{A}_{ij} (M_{11} \ M_{21} \ M_{31})_j^T, \\ a_{ij}^{(2)} &= -\mathbf{A}_{ij} (M_{12} \ M_{22} \ M_{32})_i^T, & a_{ij}^{(5)} &= \mathbf{A}_{ij} (M_{12} \ M_{22} \ M_{32})_j^T, \\ a_{ij}^{(3)} &= -\mathbf{A}_{ij} (M_{13} \ M_{23} \ M_{33})_i^T, & a_{ij}^{(6)} &= \mathbf{A}_{ij} (M_{13} \ M_{23} \ M_{33})_j^T, \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

$$a_{ij}^{(7)} = \mathbf{A}_{ij}^{(4)},$$

$$a_{ij}^{(8)} = \mathbf{A}_{ij}^{(5)},$$

kde $\mathbf{A}_{ij} = (A_{ij}^{(1)} \ A_{ij}^{(2)} \ A_{ij}^{(3)})$. Pro totální diferenciály dZ_{ij} a $d\beta_{ij}$ platí obdobné tvary, pouze symboly A zaměníme za symboly B a C . Tvary (6.1.21) je možno nahradit jinými, viz [3].

^{*)} $I = 1, \dots, 6$ značí veličiny odvozené a $I = 7$ a 8 veličiny měřené.

V případě diferenciálu ds_{ij} odpadají poslední dva výrazy s $d\varphi$ a $d\lambda$ (indexy jsou vynechány). Astronomické souřadnice φ, λ v rov. (6.1.21) je možno nahradit geodetickými souřadnicemi B, L (indexy jsou vynechány).

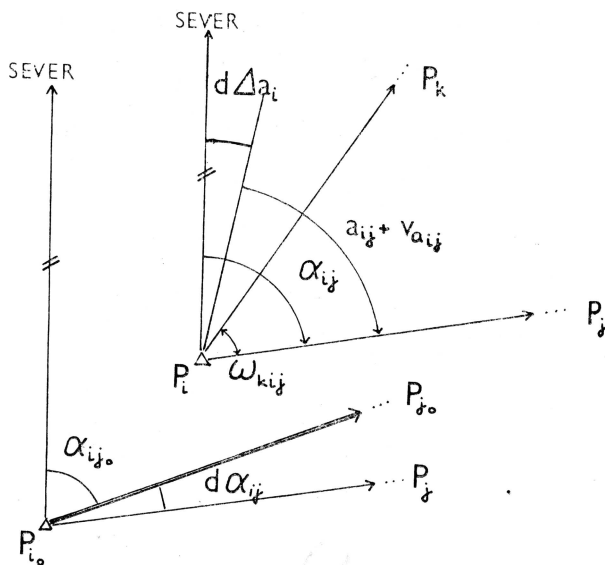
6.1.2.3 Zprostředkující rovnice oprav

Tato část je již přípravou pro závěrečné vyrovnání zprostředkujících pozorování MNČ. Navazuje tak na kap. 4.4.

Měřenými veličinami jsou: vodorovný směr a_{ij} nebo vodorovný úhel ω_{kij} , zenitová vzdálenost z_{ij} (pouze u kratších vzdáleností), délka strany s_{ij} , astronomický azimut α_{ij} , astronomická šířka φ_i a astronomická délka λ_i . Každá naměřená veličina poskytuje jednu zprostředkující rovnici oprav. V následujícím budou odvozeny jejich linearizované tvary.

Rovnici oprav pro vodorovný směr sestavíme podle obr. 6.1.5. Body P_i, P_j představují vyrovnáním určené (hledané) polohy a body P_{i_0}, P_{j_0} přibližné (dané). Dále α_{ij} a $\alpha_{i_0j_0}$ je vyrovnaný a přibližný astronomický azimut, $a_{ij} + v_{a_{ij}}$ měřený směr a jeho oprava, $d\alpha_{ij}$, viz první rov. (6.1.20), vliv nesprávných poloh bodů P_{i_0}, P_{j_0} a vliv nesprávného směru svislice, která je dána přibližně známými astronomickými souřadnicemi φ_{i_0} a λ_{i_0} (na obr. 6.1.5 je znázorněn jen vliv z nesprávných poloh) a $d\Delta a_i$ orientační posun. Podle obr. 6.1.5 platí

$$d\Delta a_i + a_{ij} + v_{a_{ij}} = \alpha_{i_0j_0} + d\alpha_{ij}.$$



Obr. 6.1.1

Dosadíme-li za $d\alpha_{ij}$ z první rov. (6.1.20), dostaneme

$$\begin{aligned} -d\Delta a_i + a_{ij}^{(1)} dx_i + a_{ij}^{(2)} dy_i + a_{ij}^{(3)} dH_i + a_{ij}^{(4)} dx_j + a_{ij}^{(5)} dy_j + a_{ij}^{(6)} dH_j + \\ + a_{ij}^{(7)} d\varphi_i + a_{ij}^{(8)} d\lambda_i + \alpha_{i_0j_0} - a_{ij} = v_{a_{ij}} \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

kde koeficienty $a_{ij}^{(l)}$, ... jsou dány vztahy (6.1.21) a $\alpha_{i_0j_0}$ se určí z rov. (6.1.6) a (6.1.17), do kterých dosadíme přibližně známé geodetické a astronomické veličiny. O výrazu $d\Delta a_i$ předpokládáme, že je dostatečně malý.

Rovnici oprav pro zenitovou vzdálenost sestavíme podle obr. 6.1.6. Úhly Z_{ij} a z_{ijo} představují vyrovnanou a přibližnou zenitovou vzdálenost, $z_{ij} + v_{z_{ij}}$ měřenou zenitovou vzdálenost a její opravu (u kratších vzdáleností), dz_{ij1} a dz_{ij2} , viz 2. rov. (6.1.20), vliv nesprávných poloh bodů P_{io} , P_{jo} a vliv nesprávného směru svislice, daný přibližně známými astronomickými souřadnicemi φ_{io} a λ_{io} . Výraz $0,5\psi_{ij}R_{ij}$ vyjadřuje vliv refrakce na měřenou zenitovou vzdálenost, v němž je ψ_{ij} úhel svislic v bodech P_i , P_j a R_{ij} je refrakční koeficient. Podle obr. 6.1.6 platí

$$0,5\psi_{ij}R_{ij} + z_{ij} + v_{z_{ij}} = z_{ijo} + dz_{ij1} + dz_{ij2}.$$

Dosadíme za $dz_{ij1} + dz_{ij2}$ výraz dz_{ij} , viz druhá rov. (6.1.20), dostaneme

$$\begin{aligned} -0,5\psi_{ij} dR_{ij} + b_{ij}^{(1)} dx_i + b_{ij}^{(2)} dy_i + b_{ij}^{(3)} dH_i + b_{ij}^{(4)} dx_j + b_{ij}^{(5)} dy_j + \\ + b_{ij}^{(6)} dH_j + b_{ij}^{(7)} d\varphi_i + b_{ij}^{(8)} d\lambda_i + z_{ijo} - z_{ij} - 0,5\psi_{ij}R_{ijo} = v_{z_{ij}}, \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

kde koeficienty $b_{ij}^{(1)}$, ... určíme pomocí vztahů (6.1.21), z_{ijo} z rov. (6.1.7) a (6.1.17), do kterých dosadíme přibližně známé geodetické a astronomické veličiny, R_{ijo} je přibližně známá hodnota refrakčního koeficientu a dR_{ij} jeho oprava.

Zenitová vzdálenost při délkách stran větších než asi 15 km bývá nahrazována výškovými nivelačními údaji, délkami stran a pod. Důvodem je skutečnost, že zenitovou vzdálenost pro větší délky stran není možno věrohodně zaměřit pro velké a nepravidelné chyby z refrakce. Tato skutečnost je detailně projednána v [5].

Rovnice oprav pro délku strany zní

$$s_{ij} + v_{s_{ij}} = s_{ijo} + ds_{ij}$$

kde naměřené hodnotě strany s_{ij} byla přisouzena oprava $v_{s_{ij}}$. Za diferenciál ds_{ij} , představující vliv nesprávných poloh bodů P_{io} , P_{jo} , dosadíme třetí rov. (6.1.20) a dostaneme

$$c_{ij}^{(1)} dx_i + c_{ij}^{(2)} dy_i + c_{ij}^{(3)} dH_i + c_{ij}^{(4)} dx_j + c_{ij}^{(5)} dy_j + c_{ij}^{(6)} dH_j + s_{ijo} - s_{ij} = v_{s_{ij}}, \quad (6.1.24)$$

kde koeficienty $c_{ij}^{(1)}$, ... určíme pomocí vztahů (6.1.21) a s_{ijo} z rov. (6.1.5) a (6.1.17), do kterých dosadíme přibližně známé geodetické veličiny.

Rovnici oprav pro astronomický azimut

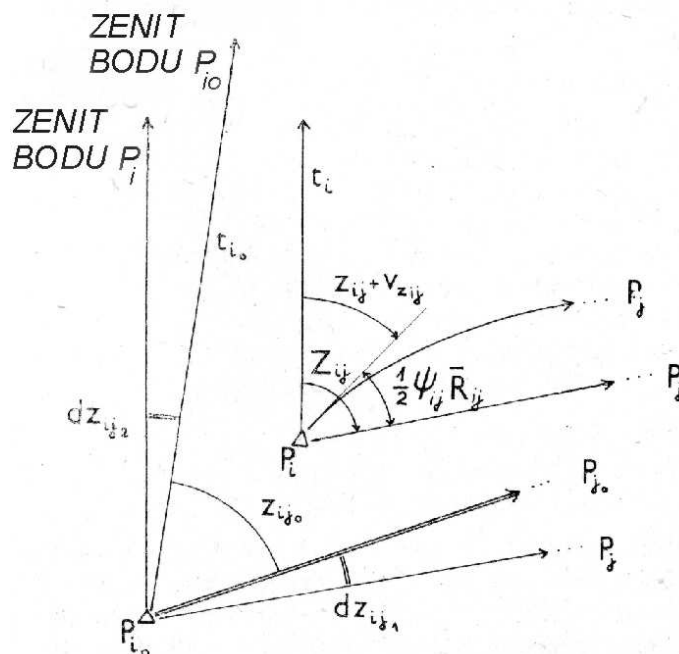
 sestavíme podle obr. 6.1.5. Platí

$$\alpha_{ij} + v_{\alpha_{ij}} = \alpha_{ijo} + d\alpha_{ij},$$

kde naměřené hodnotě astronomického azimutu α_{ij} byla přisouzena oprava $v_{\alpha_{ij}}$ (v obr. 6.1.5 není znázorněno). Za diferenciál $d\alpha_{ij}$, představující vliv nesprávných poloh bodu P_{io} , P_{jo} a vliv nesprávného směru svislice, dosadíme první rov. (6.1.20) a dostaneme

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} dx_i + a_{ij}^{(2)} dy_i + a_{ij}^{(3)} dH_i + a_{ij}^{(4)} dx_j + \\ + a_{ij}^{(5)} dy_j + a_{ij}^{(6)} dH_j + a_{ij}^{(7)} d\varphi_i + a_{ij}^{(8)} d\lambda_i + \alpha_{ijo} - \alpha_{ij} = v_{\alpha_{ij}}, \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

kde koeficienty $a_{ij}^{(l)}$, ... určíme ze vztahů (6.1.21) a α_{ij} z rov. (6.1.6) a (6.1.17), do kterých dosadíme přibližně známé geodetické a astronomické veličiny.



Obr. 6.1.2

Rov. (6.1.25) obsahuje naměřený astronomický azimut α_{ij} , rov. (6.1.22) vodorovný směr a_{ij} a orientační posun $d\Delta a_i$. V tom je jejich rozdíl.

Rovnice oprav pro astronomickou šířku a astronomickou délku jsou

$$d\varphi_i + \varphi_{i0} - \varphi_i = v_{\varphi_i} \quad (6.1.26)$$

$$d\lambda_i + \lambda_{i0} - \lambda_i = v_{\lambda_i} \quad (6.1.27)$$

kde naměřeným hodnotám šířky φ_i a délky λ_i byly přisouzeny opravy v_{φ_i} a v_{λ_i} . Za přibližně známé hodnoty φ_{i0} , λ_{i0} je možno zvolit hodnoty naměřené. Pak neznámé diferenciály $d\varphi_i$, $d\lambda_i$ jsou rovny opravám v_{φ_i} a v_{λ_i} .

Rovnici oprav pro vodorovný směr je možno nahradit *rovnici oprav pro vodorovný úhel*. Podle obr. 6.1.5 vznikne odečtením dvou rovnic typu (6.1.22), sestavené pro spojnice P_iP_j a P_iP_k . Její výhodou oprati původní rov. (6.1.22) je vyloučení neznámého orientačního posunu $d\Delta a_i$, který nevystupuje pak ani v rov. (6.1.28).

Linearizované rovnice oprav (6.1.22-27) obsahují neznámé opravy vztahované k systému obzorníkovému. Jestliže bychom užili při sestavování linearizovaných rovnic oprav vztahů (6.1.10), (6.1.14) a (6.1.16), pak vypočtené neznámé opravy jsou vztahovány k systému rovníkovému.

K sestavení linearizovaných rovnic oprav, obdobných rov. (6.1.22-27), je možno použít přímo rov. (6.1.1).

6.1.2.4 Přehled výpočetního postupu

Výpočetní postup při použití neznámých oprav v systému *obzorníkovém* je následující. Z hodnot $B_{io}, L_{io}, H_{io}, B_{jo}, L_{jo}, H_{jo}$ vypočteme pro daný referenční elipsoid přibližně pravouhlé souřadnice $X_{io}, Y_{io}, Z_{io}, X_{jo}, Y_{jo}, Z_{jo}$, rov. (6.1.17), a pomocí nich a hodnot $\varphi_{io}, \lambda_{io}$ přibližné hodnoty $\alpha_{ijo}, z_{ijo}, s_{ijo}$, rov. (6.1.5-7), jež vystupují v absolutních členech rovnic oprav (6.1.22-25). Hodnoty koeficientů se určí z rov. (6.1.21). Ve jmenovaných rovnicích je index o vynechán. Výsledkem vyrovnání jsou opravy $dx_i, dy_i, dH_i, dx_j, dy_j, dH_j, d\varphi_i, d\lambda_i, d\Delta a_i$ a dR_{ij} vystupující v rovnicích oprav (6.1.22-27). Pomocí rov. (6.1.19) převedeme prvních 6 uvedených oprav na opravy $dX_i, dY_i, dZ_i, dX_j, dY_j, dZ_j$. Konečné hodnoty jsou

$$\begin{aligned} X_i &= X_{io} + dX_i, & X_j &= X_{jo} + dX_j, \\ Y_i &= Y_{io} + dY_i, & Y_j &= Y_{jo} + dY_j, \\ Z_i &= Z_{io} + dZ_i, & Z_j &= Z_{jo} + dZ_j, \\ \varphi_i &= \varphi_{io} + d\varphi_i, & d\Delta a_i &= d\Delta a_i, \\ \lambda_i &= \lambda_{io} + d\lambda_i, & R_{ij} &= R_{ijo} + dR_{ij}, \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde n je počet zprostředkujících rovnic oprav.

Výpočetní postup při použití neznámých oprav v systému *rovníkovém*, rov. (6.1.10), (6.1.14) a (6.1.16), je ve výpočtu absolutních členů shodný s postupem předchozím. Výsledky je ale možno dosadit již přímo do rov. (6.1.28). Výpočet rov. (6.1.18) a dalších je tedy vynechán. Koeficienty v rovnicích oprav se určí z rov. (6.1.9), (6.1.13) a (6.1.15).

V této kap. 6.1 vystupují délkové a úhlové směrové veličiny. Jsou-li úhlové a směrové veličiny zaváděny např. ve $''$, je nutné zavést převod na ně z míry obloukové pomocí $\rho'' = \frac{180}{\pi} = 206264,8$. Podobně je nutné dbát obou zavedených jednotek při zavádění vah a výpočtu středních chyb.

Detailní projednání předložené problematiky včetně numerické aplikace je uvedeno v [5], kde jsou i další odkazy na literaturu.

6.1.3 Závěr

Metody trojrozměrné geodézie mohou posloužit k řešení samostatných úloh jak geodézie inženýrské, tak i vyšší geodézie. Má-li být použito metod trojrozměrné geodézie ke společnému zpracování měření z jiného oboru, např. z družicové geodézie nebo kosmické geodézie, je nutné, aby použité prostorové systémy byly shodné co do počátku i orientace os, či aby jejich neshodnost byla uvážena.

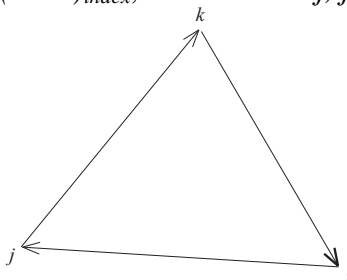
LITERATURA:

- [1] Burša M.: Základy družicové geodézie, I. díl. Naše vojsko. Praha 1960.
- [2] Hradilek L.: Adjustment of Tree-Dimensional Networks in the Geodetic Coordinate System. IAG Symposium on Optimalization of Design and Computation of Control Networks. Sopron 1977.
- [3] Kabeláč J.: Příspěvek k problematice trojrozměrné geodézie. Geod. a kart. obzor, roč. 24/66, č. 12, Praha 1978.
- [4] Wolf H.: Die Grundgleichung der Dreidimensionalen Geodäzie in elementarer Darstellung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 6 (1963), 225.

[5] Zelenka J.: Diplomní úkol. Knihovna katedra vyšší geodézie, Praha 1976.

6.2 Podmínka komplanarity

Podmínka komplanarity stanoví závislost mezi (třemi) směry, ležícími v jedné rovině. Mějme na obr. 6.2.1 tyto tři směry, jejichž směrové kosiny, které jsou ovšem závislé na zvolené souřadnicové soustavě, označme $(a \ b \ c)_{index}$, kde $index = ij, jk, ki$.



Obr. 6.2.1

Mezi nimi však platí závislost daná vztahem

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

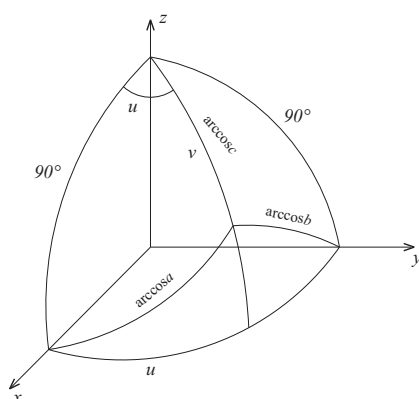
(indexy jsou vynechány), který ale není vhodný pro vyrovnání. Proto nahradíme směrový kosinus c vztahem

$$c = (1 - a^2 - b^2)^{1/2}.$$

Podmínku komplanarity pak udává determinant

$$D_{ijk} = \begin{vmatrix} a_{ij} & b_{ij} & (1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2)^{1/2} \\ a_{jk} & b_{jk} & (1 - a_{jk}^2 - b_{jk}^2)^{1/2} \\ a_{ki} & b_{ki} & (1 - a_{ki}^2 - b_{ki}^2)^{1/2} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.1)$$

Jeho aplikace je např. v kap. 8.2. Pro použití ve vyrovnání je však zapotřebí získat přetvořenou podmínku, viz rov. (4.3.1), která ovšem vyžaduje linearizaci rov. (6.2.1), a to podle zavedených neznámých. Protože tyto veličiny se různí případ od případu, nebudeme zde linearizaci provádět. Navíc prvky v determinantu rov. (6.2.1) nejsou nejvhodnější. Vhodné je nahradit jen dvěma nezávislými proměnnými veličinami, jak ukazuje obr. 6.2.2, kde jsou označeny u, v .



Obr. 6.2.2

Pak platí $a = \sin v \cos u$, $b = \sin v \sin u$, $c = \cos v$, přičemž není (prozatím) nutno pravouhloou souřadnicovou soustavu blíže definovat. Upravená rov. (6.2.1) přejde do tvaru

$$D_{ijk} = \begin{vmatrix} \cos u_{ij} & \sin u_{ij} & \cotg v_{ij} \\ \cos u_{jk} & \sin u_{jk} & \cotg v_{jk} \\ \cos u_{ki} & \sin u_{ki} & \cotg v_{ki} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.2)$$

Budeme-li považovat jen směr ij za neznámý a tudíž hledaný MNC, je nutno zavést

$$u_{ij} = u_0 + du, \quad v_{ij} = v_0 + dv,$$

Ostatní symboly ponechat a rov. (6.2.2) linearizovat. Dostaneme přetvořenou podmínkovou rovnici

$$a_{ijk} du + b_{ijk} dv + l_{ijk} = v_{ijk},$$

kde

$$a_{ijk} = \begin{vmatrix} -\sin u_0 & \cos u_0 & 0 \\ \cos u_{jk} & \sin u_{jk} & \cotg v_{jk} \\ \cos u_{ki} & \sin u_{ki} & \cotg v_{ki} \end{vmatrix},$$

$$b_{ijk} = \operatorname{cosec}^2 v_0 \sin(u_{jk} - u_{ki}),$$

$$l_{ijk} = D_{0ijk}.$$

Po dosazení přibližných hodnot u_0 , v_0 . Absolutní člen l_{ijk} je odchylka úhlu normály k rovině dané směry ik a jk , viz obr. 6.2.1, s přibližným směrem ij_0 . Podmínka komplanarity nahrazuje podmínku trojúhelníkovou, viz kap. 5. Oproti ní je však citlivější, jestliže ony tři směry neleží v jedné rovině. Dále stanoví (zajišťuje) orientaci roviny ijk v 3D prostoru. Blíže, včetně číselného příkladu, je v [1]. Taktéž viz kap. 5.2.3 a 5.3.

Linearizace rov. (6.2.1) a její číselná aplikace je uvedena v kap. 8.2.1.

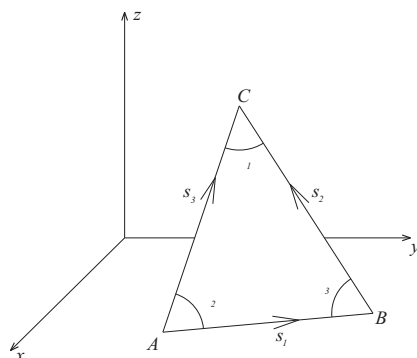
LITERATURA:

- [1] Kabeláč J., Skořepová J.: Vyrovnání prostorové družicové sítě. Geod. a kart. obzor, roč. 17/59, s. 167 – 174, Praha 1971.

6.3 Společné vyrovnání směrových a délkových veličin

V kap. 4 bylo uvedeno srovnání použití zprostředkujících a podmínkových pozorování při vyrovnání MNČ. V kap. 6.3 a dalších bude preferováno vyrovnání pomocí podmínkových pozorování přesto, že sestavení potřebného počtu podmínek je někdy velmi obtížné. Vede nás k tomu skutečnost, že vyrovnání podmínkových pozorování, resp. podmínky samotné, nejsou obvykle závislé na souřadnicové soustavě na rozdíl od vyrovnání pozorování zprostředkujících.

Takže nejbližším úkolem bude sestavení podmínkových rovnic a eventuálně i jejich linearizace. Pozornost bude věnována i zavádění vah, neboť jde o dva různé druhy měřených veličin. Teorii budeme demonstrovat na trojúhelníku A, B, C , obr. 6.3.1.



Obr. 6.3.1

Danými veličinami jsou směrové veličiny: $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ a délkové veličiny: s_1, s_2, s_3 .

Tedy počet daných veličin $n = 9$. Nutný počet $\nu = 6$ pro zajištění polohy trojúhelníku A, B, C v 3D prostoru. Počet nadbytečných měření $r = n - \nu = 3$. Takže je nutno sestavit tři podmínky. První podmínkou je podmínka komplanarity z rov. (6.2.2). Zbývající dvě volme například ve tvaru

$$s_1 \cos \alpha_3 + s_3 \cos \alpha_1 - s_2 = 0 \equiv D_{s_2}, \quad (6.3.1)$$

$$s_1 \cos \alpha_2 + s_2 \cos \alpha_1 - s_3 = 0 \equiv D_{s_3}. \quad (6.3.2)$$

Linearizací rov. (6.2.2), (6.3.1) a (6.3.2) dostaneme v uvedeném pořadí

$$\begin{aligned} a_{u_1} du_1 + a_{u_2} du_2 + a_{u_3} du_3 + a_{v_1} dv_1 + a_{v_2} dv_2 + a_{v_3} dv_3 + D_{0_{123}} &= 0, \\ b_{u_1} du_1 + b_{u_2} du_2 + b_{u_3} du_3 + b_{v_1} dv_1 + b_{v_2} dv_2 + b_{v_3} dv_3 + b_{s_1} ds_1 + \\ + b_{s_2} ds_2 + b_{s_3} ds_3 + D_{0_{s_2}} &= 0, \\ c_{u_1} du_1 + c_{u_2} du_2 + c_{u_3} du_3 + c_{v_1} dv_1 + c_{v_2} dv_2 + c_{v_3} dv_3 + c_{s_1} ds_1 + \\ + c_{s_2} ds_2 + c_{s_3} ds_3 + D_{0_{s_3}} &= 0, \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Derivace a_{index} zjistíme z rov. (6.2.2). Postupně derivujeme podle všech prvků tohoto determinantu, přičemž indexy ijk nahrazujeme indexy 123. Nejprve pro první rov. (6.3.3). Dostáváme

$$a_{u_1} = \frac{\partial D_{123}}{\partial u_1} \Big|_0 = \begin{vmatrix} -\sin u_1 & \cos u_1 & 0 \\ \cos u_2 & \sin u_2 & \cotg v_2 \\ \cos u_3 & \sin u_3 & \cotg v_3 \end{vmatrix}_0$$

$$a_{u_2} = \frac{\partial D_{123}}{\partial u_2} \Big|_0 = \begin{vmatrix} \cos u_1 & \sin u_1 & \cotg v_1 \\ -\sin u_2 & \cos u_2 & 0 \\ \cos u_3 & \sin u_3 & \cotg v_3 \end{vmatrix}_0$$

$$a_{u_3} = \frac{\partial D_{123}}{\partial u_3} \Big|_0 = \begin{vmatrix} \cos u_1 & \sin u_1 & \cotg v_1 \\ \cos u_2 & \sin u_2 & \cotg v_2 \\ -\sin u_3 & \cos u_3 & 0 \end{vmatrix}_0$$

$$a_{v_1} = \frac{\partial D_{123}}{\partial v_1} \Big|_0 = \operatorname{cosec}^2 v_{1_0} \sin(u_2 - u_3)_0$$

$$a_{v_2} = \frac{\partial D_{123}}{\partial v_2} \Big|_0 = \operatorname{cosec}^2 v_{2_0} \sin(u_3 - u_1)_0$$

$$a_{v_3} = \frac{\partial D_{123}}{\partial v_3} \Big|_0 = \operatorname{cosec}^2 v_{3_0} \sin(u_1 - u_2)_0$$

Pro druhou a třetí rov. (6.3.3) jsou derivace složitější, neboť vznikaly z rov. (6.3.1) a (6.3.2) obsahujících úhly α_{index} , takže např.

$$\cos \alpha_1 = \cos v_2 \cos v_3 + \sin v_2 \sin v_3 \cos(u_3 - u_2).$$

Derivování rov. (6.3.1) a (6.3.2) bude proto nutno provést podle vztahu

$$b_{u_1} = \frac{\partial D_{s_2}}{\partial u_1} \Big|_0 = \left(\frac{\partial D_{s_2}}{\partial \alpha_3} \cdot \frac{\partial \alpha_3}{\partial u_1} + \frac{\partial D_{s_2}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} \right)_0$$

atd. Postupně dostáváme výrazy

$$b_{u_1} = s_1 \cos v_1 \cos v_2 \sin(u_2 - u_1),$$

$$b_{u_2} = s_1 \cos v_1 \cos v_2 \sin(u_1 - u_2) + s_3 \cos v_2 \cos v_3 \sin(u_3 - u_2),$$

$$b_{u_3} = s_3 \cos v_2 \cos v_3 \sin(u_2 - u_3),$$

$$b_{v_1} = s_1 [\cos v_1 \sin v_2 - \sin v_1 \cos v_2 \cos(u_1 - u_2)],$$

$$b_{v_2} = s_1 [\sin v_1 \cos v_2 - \cos v_1 \sin v_2 \cos(u_1 - u_2)] +$$

$$+ s_3 [\cos v_2 \sin v_3 - \sin v_2 \cos v_3 \cos(u_2 - u_3)],$$

$$b_{v_3} = s_3 [\sin v_2 \cos v_3 - \cos v_2 \sin v_3 \cos(u_2 - u_3)],$$

$$b_{s_1} = \cos \alpha_3, \quad b_{s_2} = -1, \quad b_{s_3} = \cos \alpha_1,$$

$$\begin{aligned}
c_{u_1} &= s_1 \cos v_1 \cos v_3 \sin(u_3 - u_1), \\
c_{u_2} &= s_2 \cos v_2 \cos v_3 \sin(u_3 - u_2), \\
c_{u_3} &= s_1 \cos v_1 \cos v_3 \sin(u_1 - u_3) + s_2 \cos v_2 \cos v_3 \sin(u_2 - u_3), \\
c_{v_1} &= s_1 [\cos v_1 \sin v_3 - \sin v_1 \cos v_3 \cos(u_3 - u_1)], \\
c_{v_2} &= s_2 [\cos v_2 \sin v_3 - \sin v_2 \cos v_3 \cos(u_2 - u_3)], \\
c_{v_3} &= s_1 [\sin v_1 \cos v_3 - \cos v_1 \sin v_3 \cos(u_3 - u_1)] + \\
&\quad + s_2 [\sin v_2 \cos v_3 - \cos v_2 \sin v_3 \cos(u_2 - u_3)],
\end{aligned}$$

$$c_{s_1} = \cos \alpha_2, \quad c_{s_2} = \cos \alpha_1, \quad c_{s_3} = -1.$$

Podmínkové rov. (6.3.1) a (6.3.2) možno volit i v jiných tvarech a derivace upravit do vhodnějších výrazů, viz [1] nebo obdobně [2]. Systém rovnic (6.3.3) podrobíme podmínce minima, když dříve do těchto výrazů dosazujeme přibližně známé vstupní hodnoty (index 0 byl vynechán). Blíže o teorii včetně číselného použití je rovněž v [2].

Problematika obdobná, leč pro rovinu, byla uvedena v PŘÍKLADĚ 15 v kap. 5. O způsobu zavádění vah viz kap. 5.1.1 a číselná ověření různých vahových variant jsou v kap. 8.2.1 a 8.2.2.

LITERATURA:

- [1] Hubeny K.: Die Ausgleichung von Dreiecknetzen mit direkt gemessenen Seiten. Öster. Zeit. für Vermes., No. 5, 6, 1950.
[2] Kabeláč J.: Pozemní a družicové sítě v trojrozměrném prostoru. Fakultní úkol č. 420 A/70-71, knihovna katedry vyšší geodézie, Praha 1972.

6.4 Vyrovnání sítě v 3D prostoru bez závislosti na svislici

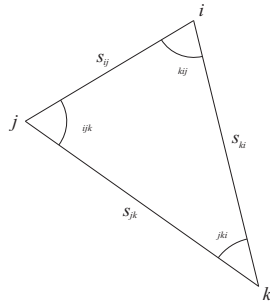
V následujícím textu je ukázáno, že postup s pomocí podmínkových pozorování je možno použít v případě, kdy nechceme pracovat s veličinami, které jsou závislé na svislici, tj. s vodorovnými směry a především ne se zenitovými vzdálenostmi. Princip pozůstává jednoduše v tom, že tyto veličiny převedeme na tzv. šikmé úhly α , viz obr. 6.4.1. Tím, společně s měřeními délkami, bude použito pouze veličin invariantních, nezávislých na směru svislic, ale i na souřadnicovém systému vůbec.

V dalším textu budou postupně sestavovány podmínkové rovnice trojúhelníkové, stranové a základnové, tedy obdobně jako při vyrovnání v 2D prostoru, leč zde pro prostor 3D. Rovněž bude uvážěn vliv pozemní refrakce.

6.4.1 Sestavení podmínkových rovnic

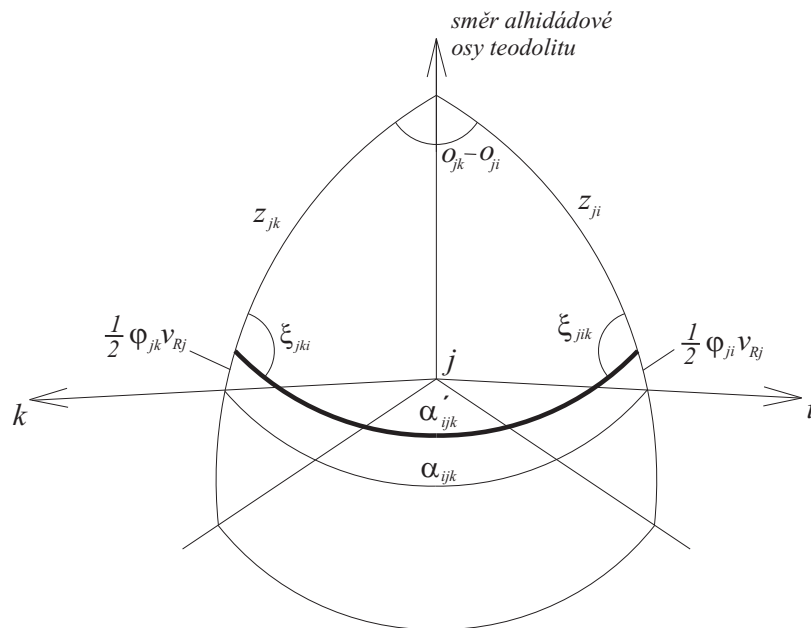
1) Podmínkové rovnice trojúhelníkové

Na obr. 6.4.1 jsou body i, j, k vrcholy prostorové sítě. O šikmých (polohových, posičních) úhlech, které jsou invariantní, platí (indexování je vždy ve smyslu kladném) již linearizovaný tvar



$$\alpha_{kij} + \alpha_{ijk} + \alpha_{jki} - 180^\circ = 0. \quad (6.4.1)$$

Obr. 6.4.1



Obr. 6.4.2

Např. úhel α_{ijk} zjistíme, obr. 6.4.2, když bod j ztotožníme se středem jednotkové koule. Platí

$$\cos \alpha_{ijk} = \cos z_{ji} \cos z_{jk} + \sin z_{ji} \sin z_{jk} \cos(o_{jk} - o_{ji}), \quad (6.4.2)$$

kde z_{ji} , z_{jk} jsou zenitové vzdálenosti bez vlivu refrakce a o_{ji} , o_{jk} vodorovné směry z bodu j na body i a k . Stejně tak zjistíme i ostatní šikmé úhly. Vliv refrakce, působící na zenitovou vzdálenost, zavedeme tvarem (pro demonstraci užito záměry z_{ji})

$$z_{ji} = z'_{ji} + \frac{1}{2} \varphi_{ji} R_j, \quad (6.4.3)$$

kde z'_{ji} je naměřená zenitová vzdálenost a φ_{ji} úhel svislic na bodech i a j . Refrakční koeficient

$$R_j = R_0 + v_{R_j}, \quad (6.4.4)$$

kde $R_0 = 0,14$ je přibližná hodnota refrakčního koeficientu a byla společná pro všechny body; v_{R_j} je jeho oprava pro bod j . Rov. (6.4.4) dosadíme do rov. (6.4.3) a získáme

$$z_{ji} = z'_{ji} + \frac{1}{2} \varphi_{ji} R_0 + \frac{1}{2} \varphi_{ji} v_{R_j}.$$

Výrazy $z'_{ji} + \frac{1}{2} \varphi_{ji} R_0$ jsou známé a zavedeme místo nich symbol z''_{ji} a vše dosadíme, rovněž tak pro záměru jk , do rov. (6.4.2). Jest

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{ijk} = & \cos \left(z''_{ji} + \frac{1}{2} \varphi_{ji} v_{R_j} \right) \cos \left(z''_{jk} + \frac{1}{2} \varphi_{jk} v_{R_j} \right) + \\ & + \sin \left(z''_{ji} + \frac{1}{2} \varphi_{ji} v_{R_j} \right) \sin \left(z''_{jk} + \frac{1}{2} \varphi_{jk} v_{R_j} \right) \cos(o_{ji} - o_{jk}), \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

kde $\frac{1}{2} \varphi_{ji} v_{R_j}$ je oprava zenitové vzdálenosti záměry ji v důsledku refrakce. Obdobně je tomu pro záměru jk a další. Rov. (6.4.5) nejprve upravíme. Po zanedbání malých veličin 2. a vyšších řádů a po malé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{ijk} = & \cos \alpha'_{ijk} + \frac{1}{2} v_{R_j} \left[-\cos z''_{ji} \sin z''_{jk} + \sin z''_{ji} \cos z''_{jk} \cos(o_{ji} - o_{jk}) - \right. \\ & \left. \cos z''_{jk} \sin z''_{ji} + \cos z''_{jk} \sin z''_{ji} \cos(o_{ji} - o_{jk}) \right], \end{aligned}$$

kde, viz obr. 6.4.2,

$$\arccos \alpha'_{ijk} = \cos z''_{ji} \cos z''_{jk} + \sin z''_{ji} \sin z''_{jk} \cos(o_{ji} - o_{jk}),$$

a je to tedy veličina známá, ovlivněná refrakcí, a budeme ji považovat za „naměřenou“. Výrazy v hranaté závorce nahradíme sinus-kosiniovými větami pro sférický trojúhelník na obr. 6.4.2 a dostáváme

$$\cos \alpha_{ijk} - \cos \alpha'_{ijk} = -\frac{1}{2} v_{R_j} \sin \alpha'_{ijk} (\varphi_{ji} \cos \xi_{jik} + \varphi_{jk} \cos \xi_{jki}).$$

Výraz na levé straně upravíme podle známé věty rovinné trigonometrie. Po úpravě má tvar

$$\alpha_{ijk} = \alpha'_{ijk} + \frac{1}{2} A_{ijk} v_{R_j}, \quad (6.4.6)$$

kde

$$A_{ijk} = \frac{1}{2} (\varphi_{ji} \cos \xi_{jik} + \varphi_{jk} \cos \xi_{jki}), \quad (6.4.7)$$

Úhly ξ určíme z obr. 6.4.2. Hodnota α'_{ijk} je hodnota známá, které byl dán význam veličiny naměřené. A jí bude příslušet náhodná oprava $v_{\alpha_{ijk}}$.

Jak jsme postupovali při odvození rov. (6.4.6), stejně tak by platilo i pro úhly α_{jki} a α_{kij} , viz obr. 6.4.1. Po jejich dosazení do rov. (6.4.1) včetně dosazení náhodných oprav $v_{\alpha_{ijk}}$, $v_{\alpha_{jki}}$ a $v_{\alpha_{kij}}$, dostáváme

$$v_{\alpha_{kij}} + v_{\alpha_{ijk}} + v_{\alpha_{jki}} + v_{R_i} A_{kij} + v_{R_j} A_{ijk} + v_{R_k} A_{jki} + U_{ijk\Delta} = 0, \quad (6.4.8)$$

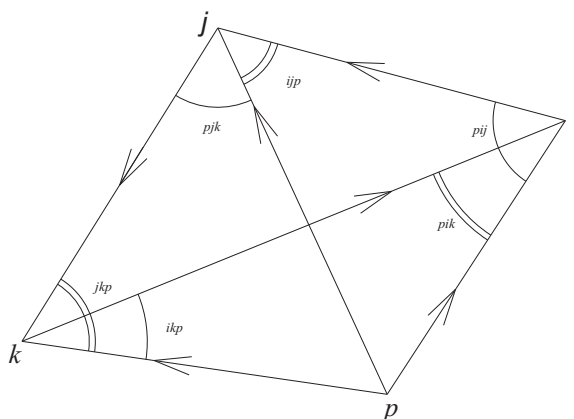
kde uzávěr je

$$U_{ijk\Delta} = \alpha'_{kij} + \alpha'_{ijk} + \alpha'_{jki} - 180^\circ.$$

Rovnice typu (6.4.8) je nutno sestavit pro každý trojúhelník, na jehož všech vrcholech byly měřeny vodorovné směry a zenitové vzdálenosti.

2) Podmínkové rovnice stranové

Při studiu sítí v dvourozměrném prostoru je základním obrazcem trojúhelník. Při sestavování podmínkových rovnic stranových v třírozměrném prostoru se ukázalo, že nejvhodnějším základním tělesem je čtyřstěn. V obr. 6.4.3 bod p představuje pól a body i, j, k vrcholy základny.



Obr. 6.4.3

Platí pak

$$\frac{\sin \alpha_{pij} \sin \alpha_{pjk} \sin \alpha_{ikp}}{\sin \alpha_{pik} \sin \alpha_{ijp} \sin \alpha_{jkp}} = 1, \quad (6.4.9)$$

kde ramena úhlů v čitateli jsou stejnosměrná a ve jmenovateli protisměrná.

Rov. (6.4.9) můžeme převést na logaritmický tvar. Za úhly α dosadíme výrazy (6.4.6), včetně náhodných oprav, poté rov. (6.4.9) linearizujeme a po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} & \cotg \alpha'_{pij} v_{\alpha_{pij}} + \cotg \alpha'_{pjk} v_{\alpha_{pjk}} + \cotg \alpha'_{ikp} v_{\alpha_{ikp}} - \\ & - \cotg \alpha'_{pik} v_{\alpha_{pik}} - \cotg \alpha'_{ijp} v_{\alpha_{ijp}} - \cotg \alpha'_{jkp} v_{\alpha_{jkp}} + \\ & + v_{R_i} (A_{pij} \cotg \alpha'_{pij} - A_{pik} \cotg \alpha'_{pik}) + \\ & + v_{R_j} (A_{pjk} \cotg \alpha'_{pjk} - A_{ijp} \cotg \alpha'_{ijp}) + \\ & + v_{R_k} (A_{ikp} \cotg \alpha'_{ikp} - A_{jkp} \cotg \alpha'_{jkp}) + U_{o_{pijk}} = 0, \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

kde význam symbolů A je dán rov. (6.4.7). Uzávěr

$$U_{o_{pijk}} = M \log \frac{\sin \alpha_{pij} \sin \alpha_{pjk} \sin \alpha_{ikp}}{\sin \alpha_{pik} \sin \alpha_{ijp} \sin \alpha_{jkp}}.$$

Pro čtyřstěn na obr. 6.4.3 je možno sestavit 3 nezávislé stranové rovnice, je-li počet měřených veličin úplný. Je přirozené, že je možno sestavit stranové rovnice i pro základny

víceúhelníkové. To však již záleží na tvaru prostorové sítě a na rozložení měřených veličin v síti.

3) Podmínkové rovnice základnové

Byly-li změřeny v trojúhelníku i, j, k , obr. 6.4.1, strany s_{ij} a s_{ki} , platí

$$\frac{s_{ij} \sin \alpha_{ijk}}{s_{ki} \sin \alpha_{jki}} = 1. \quad (6.4.11)$$

Rov. (6.4.11) můžeme převést na logaritmický tvar. Za úhly α dosadíme nejprve výrazy (6.4.6), včetně náhodných oprav, a za délky stran s výrazy $s = s' + v_s$, kde s' je naměřená délka strany (indexy jsou vynechány) a v_s její oprava. Rovnici linearizujeme a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} & \cotg \alpha'_{ijk} v_{\alpha_{ijk}} - \cotg \alpha'_{jki} v_{\alpha_{jki}} + \frac{v_{s_{ij}}}{s'_{ij}} - \frac{v_{s_{ki}}}{s'_{ki}} + \\ & + v_{R_j} A_{ijk} \cotg \alpha'_{ijk} - v_{R_k} A_{jki} \cotg \alpha'_{jki} + U_{ijk_s} = 0, \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

kde význam symbolů A je dán rov. (6.4.7). Uzávěr

$$U_{ijk_s} = M \log \frac{s'_{ij} \sin \alpha'_{ijk}}{s'_{ki} \sin \alpha'_{jki}}.$$

Počet základnových rovnic je vždy o 1 menší než počet změřených délek stran. Neleželi-li obě základny v témže trojúhelníku, získáme pro ně vztah pomocí rozšířené sinové věty.

Linearizované rov. (6.4.8), (6.4.10) a (6.4.12) obsahují neznámé opravy v_{α} , v_s měřených veličin a neznámé parametry v_R neměřených veličin. Vyrovnání je tedy nutno uskutečnit podle podmínkových pozorování s neznámými parametry, viz závěr kap. 4.7, v které je nutno zanedbat zprostředkující pozorování s neznámými parametry. Výsledné hodnoty jsou

$$\begin{aligned} R &= R_0 + v_R, \\ \alpha &= \alpha' + v_{\alpha} + v_R A, \\ s &= s' + v_s. \end{aligned}$$

(indexy jsou vynechány). Bližší je v [1], [2], [3] a [4].

Vyrovnání prostorových sítí v třírozměrném prostoru podle podmínkových pozorování je prozatím v literatuře méně propracováno než podle zprostředkujících pozorování. Předností podmínkových pozorování je vyšší nezávislost na referenčním tělese oproti zprostředkujícím pozorování, viz závěr kap. 4.

Jistou potíží je sestavování potřebných a nutných podmínkových rovnic. Nutné je, aby jejich počet nebyl přebytečný, tj. aby nebyly na sobě závislé. Navíc jejich počet je menší než počet rovnic oprav u zprostředkujících pozorování.

V předchozím textu bylo rovněž ukázáno, že uvedený postup je též nezávislý na směru svislic. Znamená to, že je využíváno čistě geometrických závislostí v třírozměrném prostoru bez ohledu na gravitační účinky v souřadnicové soustavě. A rovněž není nutné oddělovat veličiny polohové od výškových.

LITERATURA:

- [1] Hradilek L.: Space Triangulation in the Western Part of the High Tatras. *Studia geoph. et geod.*, 7 (1963), 338.
- [2] Kabeláč J.: Adjustment of a Spatial Network Independently of the Plumb-line. *Studia geoph. et geod.*, 14 (1970), 110.
- [3] Kabeláč J.: Pozemní a družicové sítě v třírozměrném prostoru. Fakultní úkol, č. 420 A/70-71, knihovna katedry vyšší geodézie, Praha 1972.
- [4] Kabeláč J.: Využití umělých družic k budování geodetických základů – upřesnění teorie poruch. Doktorská disertační práce. Soukromá knihovna autora. Nepublikováno, Praha 1988.

6.5 Vyrovnání prostorové sítě metodou družicové geodézie

I když bude o družicových sítích pojednáno v samostatné kap. 8, ale i 7, zařazujeme aplikaci vyrovnání sítí metodou družicové geodézie (DG) již nyní. Princip budování není nikterak složitý.

Půjde o zjištění všech směrů stran a alespoň některých jejich délek v dané souřadnicové soustavě.

Budou použita taková vyjádření, aby tyto všechny směrové veličiny byly vyjádřeny stejnými nebo obdobnými symboly jako při vyrovnání sítí družicových. Obvykle to je hodinový úhel greenwichský a deklinace, jejich definice ap. jsou v kap. 7.2, kterýmžto veličinám budou zde odpovídat astronomická zeměpisná délka a astronomická zeměpisná šířka, viz obr. 6.5.1 a obr. 6.5.2. Tento postup je sledován úmyslně, neboť je snahou vyrovnání družicové sítě a prostorové pozemní sítě spojit v jeden vyrovnávaný celek. Použité rovnice pro obě sítě si potom svým charakterem odpovídají. Rovněž bude použito podmínkových rovnic, neboť – jak již bylo poznamenáno – je jejich předností podstatně menší závislost na referenčním tělese a tudíž i na zavedené souřadnicové soustavě.

Z prací obdobných této kapitole jmenujme aspoň [5], [1] a [4]. Poznamenejme ještě, že zde nejsou zaváděny refrakční koeficienty, jak by se mělo stát s ohledem na nejvyšší přesnost. Teorie je aplikována na modelový příklad v [3]. Ještě poznamenejme, že zde – na rozdíl od předchozí kap. 6.4 – není zcela odstraněna závislost na směru svislic. O variantách vyrovnání bude pojednáno později.

6.5.1 Stanovení základních vztahů pro určení směru strany prostorové sítě

Na obr. 6.5.1 představuje bod P_i pozemské stanoviště o zeměpisných astronomických souřadnicích φ_i a λ_i (kladná na východ), na němž jsou měřeny azimuty α_{ij} a zenitová vzdálenost z_{ij} na bod P_j . Azimut je počítán od astronomického severu N a je kladný na východ. Přenesme směr P_iP_j , směr t_i k astronomickému zenitu Z_i a směr o k severnímu světovému pólu P do bodu P_i , obr. 6.5.2. Tyto směry protnou jednotkovou kouli, opsanou bodu P_i ve vrcholech sférického trojúhelníka P_{ij} , Z_i , P . Potom úhly φ_{ij} a λ_{ij} (kladné na východ) charakterizují směr strany P_iP_j v soustavě astronomických rovníkových souřadnic. Z obr. 6.5.2 je možno odvodit základní vztahy.

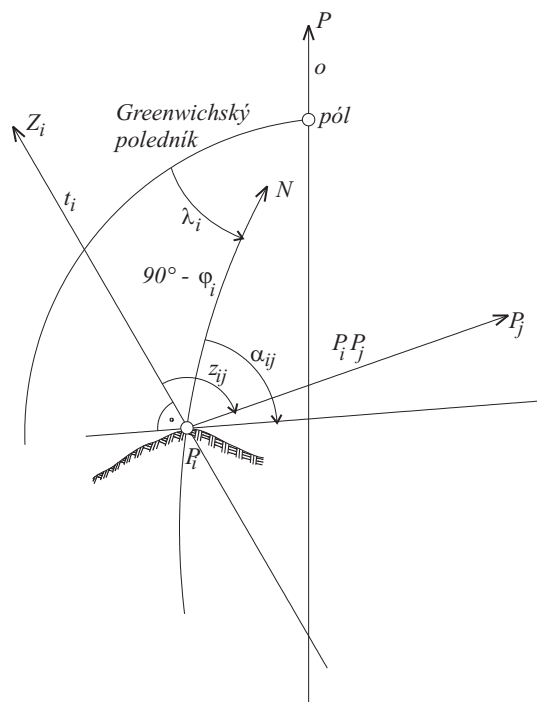
$$\cos \varphi_{ij} \sin \Delta \lambda_{ij} = \sin z_{ij} \sin \alpha_{ij}, \quad (6.5.1)$$

$$\cos \varphi_{ij} \cos \Delta \lambda_{ij} = \cos z_{ij} \cos \varphi_i - \sin z_{ij} \sin \varphi_i \cos \alpha_{ij}, \quad (6.5.2)$$

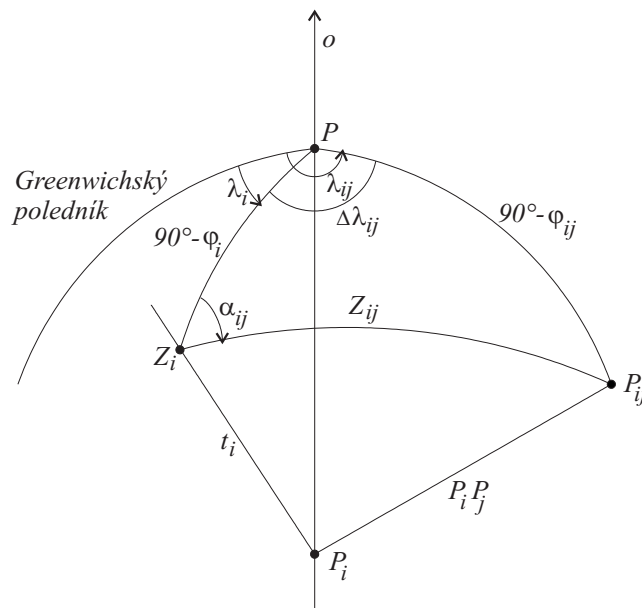
$$\sin \varphi_{ij} = \cos z_{ij} \sin \varphi_i + \sin z_{ij} \cos \varphi_i \cos \alpha_{ij}, \quad (6.5.3)$$

$$\operatorname{tg} \Delta \lambda_{ij} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{\cotg z_{ij} \cos \varphi_i - \sin \varphi_i \cos \alpha_{ij}}, \quad (6.5.4)$$

$$\lambda_{ij} = \lambda_i + \Delta \lambda_{ij}, \quad (6.5.5)$$



Obr. 6.5.1



Obr. 6.5.2

takže

$$P_i P_j = f_{ij}(\varphi_{ij}, \lambda_{ij})$$

resp.

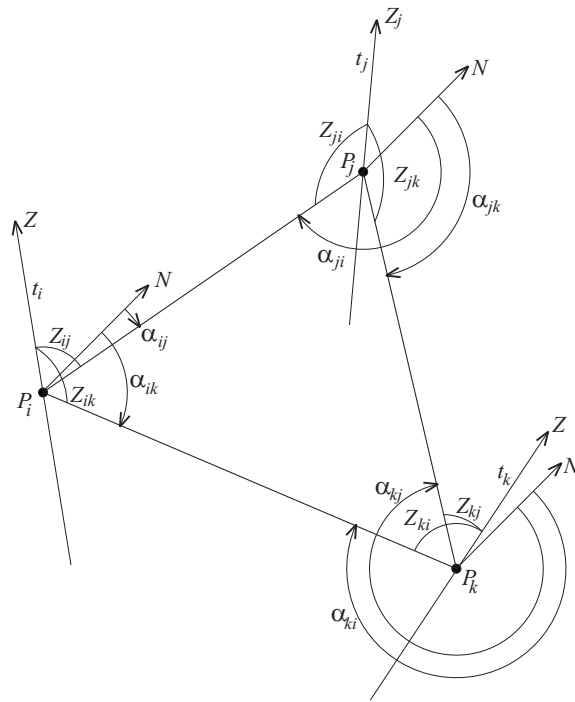
(6.5.6)

$$P_i P_j = g_{ij}(\alpha_{ij}, z_{ij}, \varphi_i, \lambda_i)$$

V obecném případě hodnota azimutu α_{ij} nebude známa. Pišme, že

$$\alpha_{ij} = \alpha'_{ij} + \Delta\alpha_i, \quad (6.5.7)$$

Kde azimut α'_{ij} na pravé straně je hodnota známá a $\Delta\alpha_i$ je neznámý orientační posun.



Obr. 6.5.3

Naši úvahu rozšířme na trojúhelník P_i, P_j, P_k , obr. 6.5.3, v němž jsou známy (určeny) všechny azimuty a zenitové vzdálenosti. Směry t_i, t_j, t_k svislic jsou dány zeměpisnými astronomickými souřadnicemi. Obdobně první rov. (6.5.6) platí

$$\begin{aligned} P_i P_j &= f_{ij}(\varphi_{ij}, \lambda_{ij}), & P_j P_i &= f_{ji}(\varphi_{ji}, \lambda_{ji}), \\ P_j P_k &= f_{jk}(\varphi_{jk}, \lambda_{jk}), & P_k P_j &= f_{kj}(\varphi_{kj}, \lambda_{kj}), \\ P_k P_i &= f_{ki}(\varphi_{ki}, \lambda_{ki}), & P_i P_k &= f_{ik}(\varphi_{ik}, \lambda_{ik}), \end{aligned}$$

kde výrazy v závorkách určíme z rov. (6.5.3), (6.5.4) a (6.5.5) po dosazení příslušných indexů.

Dříve než přistoupíme k sestavení podmínkových rovnic, zmíníme se o variantách vyrovnání, kterých je možné užít k dalším úvahám.

A – ve variantě **A** budou opravy přisuzovány přímo směřům φ_{ij} a λ_{ij} , rov. (6.5.3) a (6.5.5).

B – ve variantě **B** budou opravy či neznámé parametry přisuzovány veličinám $\Delta\alpha_i, z_{ij}, \varphi_i, \lambda_i$, druhá rov. (6.5.6) a rov. (6.5.7). Mohou následovat další varianty, viz [3].

6.5.2 Sestavení podmínkových rovnic pro variantu A

Budou sestaveny podmínkové rovnice pro shodnost protisměrů, podmínka komplanarity a základnová podmínková rovnice pro případ, že nahodilé opravy jsou přisuzovány přímo směřům φ_{ij} a λ_{ij} .

Podmínková rovnice pro shodnost protisměrů

Tyto podmínky vycházejí ze vztahu $\varphi_{ij} + \varphi_{ji} = 180^\circ$, jestliže obě hodnoty jsou měřeny na poledníku od severního pólu P a nejsou větší než 180° . Platí pak podmínková rovnice φ_{ij} . Zní

$$\phi_{ij} \equiv \varphi_{ij} + \varphi_{ji} - 180^\circ = 0. \quad (6.5.8)$$

Pro zeměpisné délky stran P_iP_j a P_jP_i platí $\lambda_{ji} - \lambda_{ij} = \pm 180^\circ$, takže podmínková rovnice A_{ij} je

$$A_{ij} \equiv \lambda_{ij} - \lambda_{ji} \pm 180^\circ. \quad (6.5.9)$$

Přetvořené podmínkové rovnice, viz kap. 4.3, jsou jednoduše

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &\equiv v_{\varphi_{ij}} + v_{\varphi_{ji}} + U_{\phi_{ij}} = 0, \\ A_{ij} &\equiv v_{\lambda_{ij}} - v_{\lambda_{ji}} + U_{A_{ij}} = 0, \end{aligned}$$

kde $U_{\phi_{ij}} = \varphi_{ijo} + \varphi_{jio} - 180^\circ$ a $U_{A_{ij}} = \lambda_{ijo} - \lambda_{jio} \pm 180^\circ$ jsou uzávěry. Index o značí přibližné hodnoty.

Podmínka komplanarity, nebo-li podmínka pro tři směry, ležící v jedné rovině, která je rovněž používaná při vyrovnání družicových sítí DG, viz [2], je vektorově vyjádřena tvarem

$$\frac{P_iP_j}{|P_iP_j|} \times \frac{P_jP_k}{|P_jP_k|} \cdot \frac{P_kP_i}{|P_kP_i|} = 0,$$

který je možno zjednodušit na tvar, viz též kap. 6.2,

$$K_{ijk} \equiv \begin{pmatrix} \cos \lambda_{ij} & \sin \lambda_{ij} & \operatorname{tg} \varphi_{ij} \\ \cos \lambda_{jk} & \sin \lambda_{jk} & \operatorname{tg} \varphi_{jk} \\ \cos \lambda_{ki} & \sin \lambda_{ki} & \operatorname{tg} \varphi_{ki} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.5.10)$$

Linearizací pro všech devět veličin jej převedeme na přetvořenou podmínkovou rovnici

$$\sum_J K_J v_J + U_{K_{ijk}} = 0,$$

kde $K_J = \left(\frac{\partial K_{ijk}}{\partial J} \right)_o$, K_{ijk} je dáno rov. (6.5.10) a indexy $J = \varphi_{ij}, \lambda_{ij}, \dots, \lambda_{ki}$. Absolutní/prostý člen, či též uzávěr, viz kap. 4.3, je

$$U_{K_{ijk}} = (K_{ijk})_o,$$

kde index o opět značí, že byly dosazeny přibližně známé hodnoty do rov. (6.5.10).

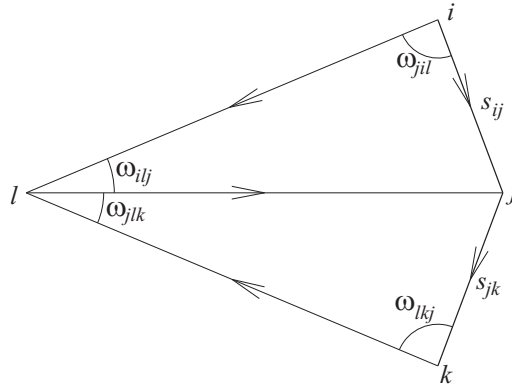
Základnová podmínková rovnice

Pro jednoduchý případ, obr. 6.5.4, platí

$$S_{ijk} \equiv \frac{\sin \omega_{jil} \sin \omega_{jlk}}{\sin \omega_{lij} \sin \omega_{lkj}} - \frac{s_{jk}}{s_{ij}} = 0, \quad (6.5.11)$$

kde ω_{jil}, \dots jsou šikmé úhly na stěnách polyedru a s_{ij}, s_{jk} jsou měřené délky stran. Úhly ω_{il}, \dots možno vyjádřit

$$\cos \omega_{jil} = \sin \varphi_{ij} \sin \varphi_{il} + \cos \varphi_{ij} \cos \varphi_{il} \cos(\lambda_{ij} - \lambda_{il}), \dots \quad (6.5.12)$$



Obr. 6.5.1

V rov. (6.5.11) je nyní možno úhly ω_{il}, \dots nahradit veličinami měřenými a neznámými, prostřednictvím vztahů (6.5.12). Tak by se dělo ve variantě **B**. My zde ve variantě **A** přisuzujeme opravy přímo směrovým veličinám $\varphi_{ij}, \lambda_{ij}$ atd. Základnová podmínková rovnice linearizovaná, která má tvar

$$\sum_J S_J v_J + U_{S_{ijkl}} = 0,$$

má indexy $J = \varphi_{ij}, \lambda_{ij}, \varphi_{ib}, \lambda_{ib}, \varphi_{li}, \lambda_{li}, \varphi_{lj}, \lambda_{lj}, \varphi_{lk}, \lambda_{lk}, \varphi_{kl}, \lambda_{kl}, \varphi_{kj}, \lambda_{kj}, s_{ij}, s_{jk}$. Dále je

$$S_J = \left(\frac{\partial S_{ijkl}}{\partial J} \right)_o, \quad U_{S_{ijkl}} = S_{ijkl}.$$

Úplné a exaktní tvary derivací a zjednodušený postup pro jejich odvození je v [3]. Obdobný postup odvození, leč poněkud složitější, vyžaduje varianta **B**.

6.5.3 Stanovení počtu podmínkových rovnic

Následující úvahu uskutečníme pro jednoduchou síť, ve které se žádné spojnice nekříží. Jde tedy o jednoduchou síť, která má:

- v – vrcholů, kde nový vrchol vytvoří jen 2 spojnice,
- p – příček, kdy se z jedné příčky vytvořil vždy jen jeden trojúhelník,
- s – počet stran sítě včetně příček.

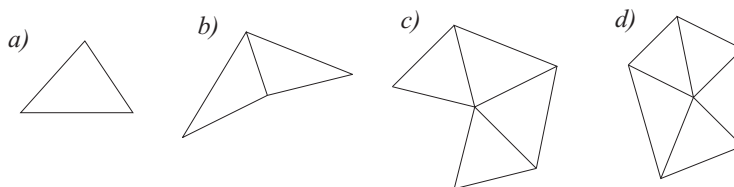
Bude-li síť, viz obr. 6.5.5, obsahovat v vrcholů a p příček (při předpokládaném a uvedeném zjednodušení), pak pro počet s všech stran včetně příček p platí, že

$$s = 2v + p - 3.$$

Počty podmínkových rovnic jsou

$$\begin{aligned} \text{prostisměrných: } \phi, A &= 2s = 2(2v + p - 3) \\ \text{komplanarity: } \Delta &= v + p - 2 \\ \text{základnových: } z &= \text{počet měřených stran} - 1 \end{aligned} \tag{6.5.13}$$

kde ϕ , Λ je počet podmínek pro shodnost protisměrů, viz rov. (6.5.8) a (6.5.9), Δ je počet podmínek komplanarity, viz rov. (6.5.10) a z je počet podmínek základnových, viz příkladně rov. (6.5.11). V přehledu viz tab. 6.5.1.



Obr. 6.5.1 a, b, c, d

Tab. 6.5.1 udává aplikace rov. (6.5.13) pro obrazce sítí na obr. 6.5.5 a), ..., d).

Tab. 6.5.1 Počty vrcholů ν , příček p , stran s včetně příček p , podmínkových rovnic ϕ , Λ , Δ a z , viz rov.(6.5.13)

Obr. 6.5.5	ν	p	s	ϕ, Λ	Δ	z
a)	3	0	3	á 3	1	Počet
b)	4	0	5	á 5	2	změřených
c)	6	0	9	á 9	4	základnen
d)	6	1	10	á 10	5	mínus 1

Toto jsou ovšem počty všech možných podmínkových rovnic. U posledního případu d) v tab. 6.5.1 by to bylo $n - 2$ plus podmínky základnové. Počet nutných pozorování pro umístění jednoho trojúhelníku v souřadnicové soustavě je 6. Pro ν vrcholů je nutný počet $\nu = 6 + (\nu - 3) \cdot 3 = 3\nu - 3$. Počet nadbytečných pozorování a tudíž i počet podmínkových rovnic bude $r = n - \nu$.

6.5.4 Zhodnocení a závěr

V této kap. 6.5 byl projednáván případ vyrovnání prostorové sítě opět podle podmínkových pozorování MNC. Jde či vlastně šlo jen o přípravu ke zvolenému vyrovnání. Vlastní vyrovnání by se dělo podle teorie uvedené v kap. 4.3. Snahou bylo přiblížit se v teorii i ve výpočetní praxi postupům používaným v DG, a tak přiblížit navzájem vyrovnání pozemních prostorových sítí s vyrovnáním sítí družicových pro jejich společné vyrovnání. Byl opět použit postup podmínkových pozorování především proto, že nejsou závislá na referenčním tělese. Sestavení podmínkových rovnic je však oproti sestavení rovnic zprostředkujících složitější (ba v některých případech svízelné). Viz též zhodnocení v kap. 4.

V předchozím textu byla řešena varianta A, kdy opravy byla přisuzovány směrovým charakteristikám φ_{ij} , λ_{ij} , které ovšem nejsou veličinami přímo měřenými, což z hlediska MNC není po teoretické stránce správné. Ze zkušenosti je však známo, že po praktické stránce výsledky nedoznají nepřístupných změn. Správnější by bylo náhodné opravy přisoudit přímo měřeným veličinám z_{ij} , α_{ij} , φ_i , λ_i , jak ukazují rov. (6.5.1) a další. Tento postup předvádí varianta B, která však zde uvedena není. Snaživý student ji najde v práci [3].

Nahodilé opravy by zde měly být správně přepsány nejen směrům, ale i délkám. O tom bylo pojednáno v kap. 6.3 a bude se o tomto postupu jednat v dalších částech.

Ještě dodejme, že do varianty **A** je možno vstoupit s upravenými veličinami $(\varphi_{ij} - \varphi_{ji} + 180^\circ)/2$ a $(\lambda_{ij} + \lambda_{ji} \pm 180^\circ)/2$, viz rovněž [3]. V této citaci najde čtenář i příklad numerické aplikace. Výsledky z použitého modelu jsou v obou variantách **A** a **B** prakticky schodné. Nejlepší poskytuje varianta **A**. Oba postupy souhlasí s hodnotami modelovými.

Závislost na referenčním tělese by ovšem vzrostla, kdyby zenitové vzdálenosti byly počítány z výšek. Výsledné hodnoty orientace spojnice dvou bodů sítě jsou přímo v astronomickém rovníkovém systému. Použití tohoto postupu vyrovnání se nabízí při pracích souvisejících s proměřováním základny pro družicová měření. V případě, že bychom chtěli znát orientaci základny v systému geodetickém, provedeme buď převod ze systému astronomického do systému geodetického nebo uskutečníme vyrovnání celé sítě přímo v systému geodetickém. Posledně uvedený postup by ovšem vyžadoval převedení vstupních hodnot astronomických na geodetické.

LITERATURA:

- [1] Filippov A. E.: Uslovnnye uravnenija v seti prostranstvennoj trianguljacii. Geod., kart. i aerofoto., 7 (1968), 69, Lvov.
- [2] Kabeláč J., Skořepová J.: Vyrovnání prostorové družicové sítě. Geod. a kart. obzor, roč. 17/59, s. 167 – 174, Praha 1971.
- [3] Kabeláč J.: Pozemní a družicové sítě v třírozměrném prostoru. Vyrovnání prostorové sítě bez závislosti na směru tížnic. Fakultní úkol, Observatoř astronomie a geofyziky ČVUT, Praha 1972.
- [4] Ramsayer K.: Dreidimensionaler Polygonzug im geozentrischen Koordinatensystem. Zeitschrift für Vermessungswesen, 95 (1970), 471.
- [5] Rinner K.: Determination of Scale in Spatial Direction Networks. Proceedings of the International Symposium Figure of the Earth and Refraction, Vienna, March 14th – 17th, 1967, p. 90.

6.6 Vyrovnání prostorové trilaterační sítě objemovou podmínkou

6.6.1 Úvod

Tato kapitola popisuje prostorovou síť, v níž jsou měřeny jen délky stran této sítě. Jde tedy o síť trilaterační. Vyrovnání bude uskutečněno opět podle podmínkových pozorování MNČ z důvodů, uvedených v závěru předchozího textu. Síť bude vyrovnána v trojrozměrném prostoru 3-D pomocí tzv. objemové podmínky. Její odvození vychází ze vzorce pro objem čtyřstěnu, jehož autorem je N. Tartaglio [1], a to již před téměř půl tisíciletím.

6.6.2 Tvar objemové podmínky a její úprava

Při vyrovnání rovinné sítě, ať triangulační, trilaterační nebo kombinované, je základním obrazcem trojúhelník. Mluvíme pak o trigonometrii a všechny potřebné vztahy pro vyrovnání takovéto sítě jsou odvozeny z trigonometrických vztahů.

Při vyrovnání prostorové sítě jest se domnívati, že základním geometrickým obrazem je čtyřstěn. O jeho vlastnostech pojednává tzv. tetragonometrie, např. [5]. Mnohé geometrické vztahy pro čtyřstěn (tetraedron) jsou odvozeny nebo jen uvedeny v [1] a [6]. V práci [1] jsme

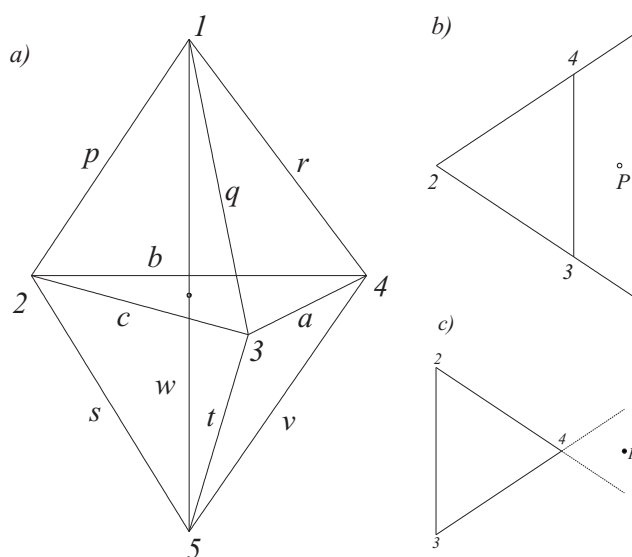
nalezli vzorec pro výpočet objemu V čtyřstěnu, když jsou známy délky a, b, c, p, q, r všech šesti hran, obr. 6.6.1a. Má tvar

$$V = \frac{1}{12} \left[a^2 p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2) + \right. \\ \left. + b^2 q^2 (c^2 + a^2 - b^2 + r^2 + p^2 - q^2) + \right. \\ \left. + c^2 r^2 (a^2 + b^2 - c^2 + p^2 + q^2 - r^2) - \right. \\ \left. - a^2 q^2 r^2 - b^2 r^2 p^2 - c^2 p^2 q^2 - a^2 b^2 c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.6.1)$$

a jeho autorem je N. Tartaglio (1500? – 1557), viz [1]. Rov. (6.6.1) je též možno zapsat ve tvaru determinantu

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & p^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & r^2 & 1 \\ p^2 & q^2 & r^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.6.2)$$

Předností těchto vzorců je vyjádření objemu pouze z délek hran.



Obr. 6.6.1 a, b, c

Podmínkovou rovnicí objemovou sestavíme podle obr. 6.6.1a, který znázorňuje dva čtyřstěny 1, 2, 3, 4, a 2, 3, 4, 5. Je zřejmé, že součet jejich objemů je rovněž roven součtu objemů tří čtyřstěnu o společné tělesové úhlopříčce 1–5. Tedy

$$V_{1234} + V_{2345} = V_{1235} + V_{1345} + V_{1245}. \quad (6.6.3)$$

Podle polohy průsečíku P tělesové úhlopříčky 1–5 v rovině trojúhelníka 2, 3, 4 rozeznáváme tři případy:

1. Průsečík P leží uvnitř trojúhelníka 2, 3, 4. Pro tento případ platí rov. (6.6.3), viz obr. 6.6.1a.
2. Průsečík P leží vně trojúhelníka 2, 3, 4 proti jedné z jeho stran, viz obr. 6.6.1b. Potom bude platit podmínková objemová rovnice ve tvaru

$$V_{1234} + V_{2345} = V_{1235} + V_{1245} - V_{1345}$$

3. Průsečík P leží vně trojúhelníka 2, 3, 4 proti jednomu z jeho vrcholů, viz obr. 6.6.1c. Potom platí podmínková objemová rovnice

$$V_{1234} + V_{2345} = V_{1235} - V_{1245} - V_{1345}$$

Jestliže písmeny $a, b, c, p, q, r, s, t, v$ jsou označeny hrany šestistěnu a písmenem w jeho tělesová úhlopříčka, obr. 6.6.1a, pak pro obecný šestistěn má podmínková objemová rovnice tvar

$$V_{abcqr} + V_{abctv} \pm V_{aqrtw} \pm V_{bprsv} \pm V_{cpqst} = 0, \quad (6.6.4)$$

Kde se znaménko řídí podle předchozích bodu 1, 2 a 3. Uvedené hrany a, \dots, w mají význam měřených délek stran sítě. Dosadíme-li do rov. (6.6.4) objemy podle rov. (6.6.1), bude mít podmínková rovnice, platící pro jeden šestičlen, tvar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} [a^2 p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2) + \\ & \quad + b^2 q^2 (c^2 + a^2 - b^2 + r^2 + p^2 - q^2) + \\ & \quad + c^2 r^2 (a^2 + b^2 - c^2 + p^2 + q^2 - r^2) - \\ & \quad - a^2 q^2 r^2 - b^2 r^2 p^2 - c^2 p^2 q^2 - a^2 b^2 c^2]^{\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{1}{12} [a^2 s^2 (b^2 + c^2 - a^2 + t^2 + v^2 - s^2) + \\ & \quad + b^2 t^2 (c^2 + a^2 - b^2 + v^2 + s^2 - t^2) + \\ & \quad + c^2 v^2 (a^2 + b^2 - c^2 + s^2 + t^2 - v^2) - \\ & \quad - a^2 t^2 v^2 - b^2 v^2 s^2 - c^2 s^2 t^2 - a^2 b^2 c^2]^{\frac{1}{2}} \pm \\ & \pm \frac{1}{12} [a^2 w^2 (q^2 + r^2 - a^2 + t^2 + v^2 - w^2) + \\ & \quad + q^2 v^2 (r^2 + a^2 - q^2 + t^2 + w^2 - v^2) + \\ & \quad + r^2 t^2 (a^2 + q^2 - r^2 + w^2 + v^2 - t^2) - \\ & \quad - a^2 t^2 v^2 - q^2 t^2 w^2 - r^2 w^2 v^2 - a^2 q^2 r^2]^{\frac{1}{2}} \pm \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

$$\begin{aligned}
& \pm \frac{1}{12} [b^2 w^2 (p^2 + r^2 - b^2 + s^2 + v^2 - w^2) + \\
& \quad + p^2 v^2 (r^2 + b^2 - p^2 + s^2 + w^2 - v^2) + \\
& \quad + r^2 s^2 (b^2 + p^2 - r^2 + w^2 + v^2 - s^2) - \\
& \quad - b^2 s^2 v^2 - p^2 s^2 w^2 - r^2 w^2 v^2 - b^2 p^2 r^2] \pm \\
& \pm \frac{1}{12} [c^2 w^2 (p^2 + q^2 - c^2 + s^2 + t^2 - w^2) + \\
& \quad + p^2 t^2 (q^2 + c^2 - p^2 + s^2 + w^2 - t^2) + \\
& \quad + q^2 s^2 (c^2 + p^2 - q^2 + w^2 + t^2 - s^2) - \\
& \quad - c^2 s^2 t^2 - p^2 s^2 w^2 - q^2 w^2 t^2 - c^2 p^2 q^2] \pm = 0.
\end{aligned}$$

Označme levou stranu rov. (6.6.5) jako funkci U , takže

$$U = U(a, b, c, p, q, r, s, t, v, w)$$

a linearizujeme ji (za předpokladu existence potřebných derivací) podle Taylorova rozvoje. Dostaneme přetvořenou objemovou rovnici podmínkovou, viz kap. 4.3,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial a} v_a + \frac{\partial U}{\partial b} v_b + \frac{\partial U}{\partial c} v_c + \frac{\partial U}{\partial p} v_p + \frac{\partial U}{\partial q} v_q + \frac{\partial U}{\partial r} v_r + \frac{\partial U}{\partial s} v_s + \frac{\partial U}{\partial t} v_t + \\
& + \frac{\partial U}{\partial v} v_v + \frac{\partial U}{\partial w} v_w + U_0 = 0,
\end{aligned} \tag{6.6.6}$$

ve které vyjádříme parciální derivace a uzávěr U_0 pomocí měřených veličin. Parciální derivace byly zjištěny z rov. (6.6.5) derivováním podle jednotlivých proměnných $a, b, c, p, q, r, s, t, v, w$. Tak např. derivováním podle proměnné a s přihlédnutím, že

$$\begin{aligned}
12V_{abcprq} = & [a^2 p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2) + \\
& + b^2 q^2 (c^2 + a^2 - b^2 + r^2 + p^2 - q^2) + \\
& + c^2 r^2 (a^2 + b^2 - c^2 + p^2 + q^2 - r^2) - \\
& - a^2 q^2 r^2 - b^2 r^2 p^2 - c^2 p^2 q^2 - a^2 b^2 c^2] \pm
\end{aligned}$$

a obdobně pro další objemy, dostaneme po úpravě

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial a} = & \frac{1}{144} a \{ (V_{abcprq})^{-1} [p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2 - a^2) + (q^2 - c^2)(b^2 - r^2)] + \\
& + (V_{abcstv})^{-1} [s^2 (b^2 + c^2 - a^2 + t^2 + v^2 - s^2 - a^2) + (t^2 - c^2)(b^2 - v^2)] \pm \\
& \pm (V_{aqrvtw})^{-1} [w^2 (q^2 + r^2 - a^2 + t^2 + v^2 - w^2 - a^2) + (v^2 - r^2)(q^2 - t^2)] \}
\end{aligned}$$

Obdobným způsobem získáme derivace podle zbývajících proměnných v rov. (6.6.5). Jednotlivé derivace je taktéž možno vyjádřit pomocí determinantů užitím rov. (6.6.2).

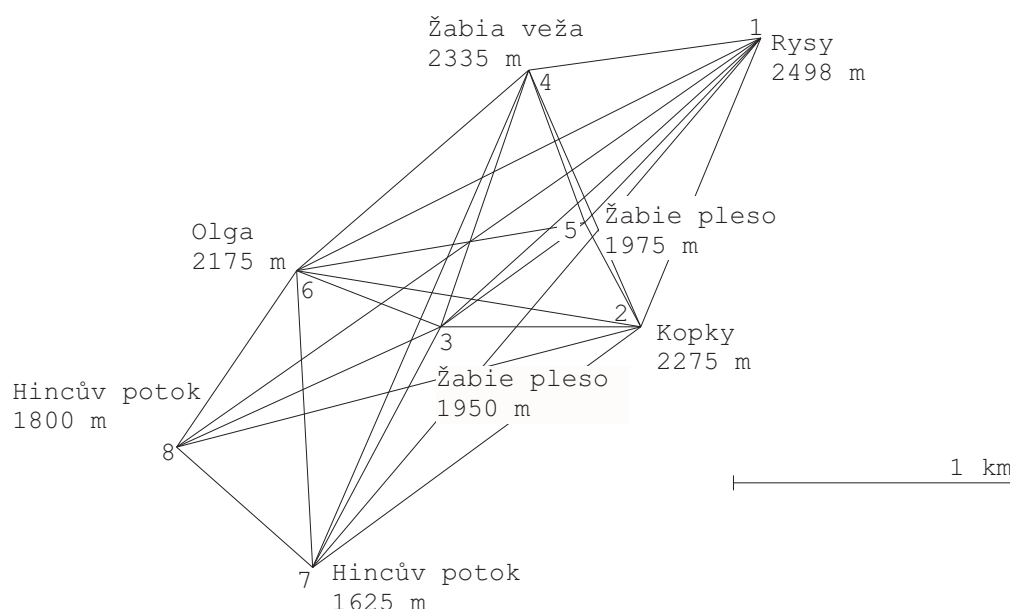
6.6.3 Číselná aplikace

Nejprve je nutno určit počet podmínkových rovnic. Podle obr. 6.6.2 je počet vrcholů $n = 8$. Počet všech možných spojnic (stran sítě) je 28. Strany 5-7, 5-8, 4-8 však nebyly měřeny. Počet měřených stran je tedy 25. Počet nutných známých stran je $3(n-2)=18$. Počet nadbytečných měření je $r = 25 - 18 = 7$. Bylo tedy nutno podle obr. 6.6.2 určit 7 šestistěnů, pro které byly sestaveny objemové podmínkové rovnice typu (6.6.4), resp. (6.6.5).

Použity byly tyto šestistěny:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1.: 1, 2, 3, 4, 5 | 5.: 2, 3, 4, 6, 7 |
| 2.: 2, 3, 4, 5, 6 | 6.: 2, 3, 6, 7, 8 |
| 3.: 1, 3, 4, 5, 6 | 7.: 1, 3, 6, 7, 8 |
| 4.: 1, 2, 3, 6, 7 | |

Bliže o teorii viz kap. 4.3. Číselné hodnoty dané i průběžné jsou uvedeny v [3] a částečně i v [4].



Obr. 6.6.1

6.6.4 Závěr

Tato kapitola uvedla tzv. „objemovou“ podmínku pro vyrovnání trilaterační sítě v 3D.

Její předností je možno spatřovat v tom, že je neobyčejně citlivá na chyby v délkách, neboť velikost těchto chyb roste s velikostí objemu uvažovaného čtyřstěnu. Vyrovnání pouze z délek nám dále jednoznačně odhalí chyby systematické, případně hrubé, a to bez vlivu chyb v měřených zenitových úhlech. Předností odvozené podmínkové „objemové“ rovnice je i vyloučení vnitřních funkcí. Tuto skutečnost nám umožnil vzorec Tartagliův pro výpočet objemu čtyřstěnu, jen s pomocí délek. Vyrovnání podle podmínkových měření poskytuje i další přednost – nevyžaduje definici souřadnicové soustavy, jak je tomu např. u zprostředkujících měření. Tím odpadají těžkosti při redukci měřených veličin.

Nedostatkem vyrovnání podle podmínkových měření je všeobecně známá obtížnost v sestavení obecného tvaru podmínkové rovnice a často i v podchycení potřebného počtu těchto rovnic. Mají-li být výsledkem souřadnice v prostoru nebo alespoň výšky jednotlivých bodů, je nutné vyrovnané hodnoty získané z podmínek transformovat do příslušné soustavy.

Předložená metoda dává tedy možnost použití nové, nezávislé podmínky pro vyrovnání prostorových trilateračních sítí a tím i možnost k odstranění systematických nebo hrubých chyb.

LITERATURA:

- [1] ENCYKLOPÄDIE der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Dritter Band: Geometrie, erster Teil, zweite Hälfte. Leipzig, B.G. Teubner 1914-31.
- [2] Kabeláč J.: Výškové vyrovnání vysokohorské sítě „Rysy 1988“. Geod. a kart. obzor, roč. 40(82), č. 1/1994.
- [3] Kabeláč J.: Über die Volumensbedingung bei der Ausgleichung eines dreidimensionalen Trilaterationssnetzes. Öster. Zeitsch. für Verme. und Photo., J. 81, No. 2/1993.
- [4] Kabeláč J.: O „objemové“ podmínce při vyrovnání trilaterační sítě v trojrozměrném prostoru. Geod. a kart. obzor, r.39/81, č.4/1993.
- [5] Lambert J. H.: Beiträge zum Gebrauch der Mathematik. 2, Berlin 1767.
- [6] Naas J. – Schmid H. L.: Mathematisches Wörterbuch. B. I. a II., Berlin, Stuttgart 1967.

6.7 Prostorové protínání z délek

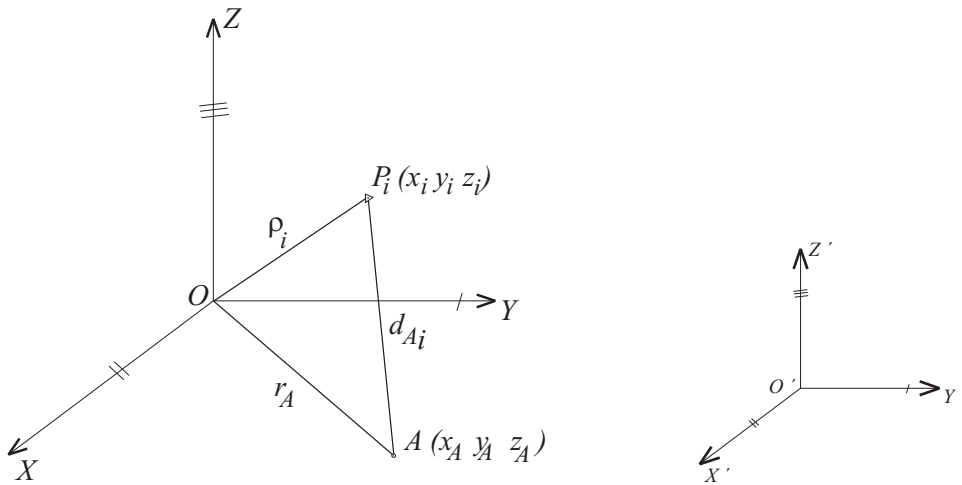
6.7.1 Úvod

Nechť v libovolném pravouhlém prostorovém systému S' , na obr. 6.7.1 dole, jsou dány souřadnice x'_i, y'_i, z'_i bodů P_i a šikmé naměřené vzdálenosti $d_{Ai} = P_i, A$ mezi těmito body a bodem A , kde $i = 1, \dots, n$ a n je počet bodů a počet měřených délek, viz obr. 6.7.1. Úkolem je převést souřadnice x'_i, y'_i, z'_i ze soustavy S' na souřadnice x_i, y_i, z_i v soustavě S , zde najít souřadnice x_A, y_A, z_A bodu A a tyto převést zpět do soustavy S' , což znamená zjistit souřadnice x'_A, y'_A, z'_A . V geodetické praxi je úloha protínání obvykle řešena na referenční ploše, tedy v dvourozměrném prostoru. Prostorového řešení se užívá v třírozměrné a družicové geodézii, viz např. [2] a [7]. Při nadbytečném počtu měření jsou zde hledány neznámé přírůstky vůči známým vstupním hodnotám, viz např. [2], [3], [4], [5], [7] aj. Některé práce, např. [1] a [6] aj., určují při nutném počtu pozorování neznámé veličiny přímo, avšak řešením tří kvadratických rovnic.

Úkolem této kapitoly je nejen podat informace o postupu řešení, ale i tento postup co nejvíce zjednodušit oproti výše citovaným pracem.

6.7.2 Teoretické řešení úlohy

Souřadnice x'_i, y'_i, z'_i systému S' (místní, referenční – geodetický, geocentrický rovníkový atp.) o počátku O' (obecný bod, střed elipsoidu, těžiště Země atp.) transformujeme translací (posunem) do systému S , jehož osy $X \parallel x', Y \parallel y', Z \parallel z'$ a počátek O leží v těžišti bodů P_i .



Obr. 6.7.1

Nové souřadnice vypočteme ze vztahů

$$x_i = x'_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x'_i \quad (6.7.1)$$

a analogicky pro y_i a z_i . Takže o nich musí platit, že

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n z_i = 0. \quad (6.7.2)$$

Z obr. 6.7.1 dále vyplývá, že

$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad (6.7.3)$$

$$r_A^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2, \quad (6.7.4)$$

kde ρ_i je tedy veličina známá a r_A je veličina hledaná. Naměřenou vzdálenost d_{Ai} dále vyjádříme vztahem

$$d_{Ai}^2 = (x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 + (z_i - z_A)^2,$$

který rozvedeme a pomocí rov. (6.7.3) a (6.7.4) upravíme. Dostáváme

$$d_{Ai}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - 2(x_i x_A + y_i y_A + z_i z_A) + x_A^2 + y_A^2 + z_A^2,$$

$$d_{Ai}^2 = \rho_i^2 - 2(x_i x_A + y_i y_A + z_i z_A) + r_A^2 \quad (6.7.5)$$

Posledně uvedenou rovnici vyjádřenou pro všechna $i = 1, \dots, n$ sečteme. Pro hledanou veličinu r_A pak dostaneme výraz

$$n \cdot r_A^2 = \sum_{i=1}^n d_{Ai}^2 - \sum_{i=1}^n \rho_i^2 + 2 \left(x_A \sum_{i=1}^n x_i + y_A \sum_{i=1}^n y_i + z_A \sum_{i=1}^n z_i \right).$$

A protože platí rov. (6.7.2), platí

$$r_A^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n d_{Ai}^2 - \rho_i^2 \right), \quad (6.7.6)$$

čímž je určena vzdálenost r_A , viz obr. 6.7.1. Zbývá určit souřadnice x_A, y_A, z_A bodu A v soustavě S a posléze hledané souřadnice x'_i, y'_i, z'_i bodu A v soustavě S' , čímž bude úloha vyřešena.

6.7.2.1 Řešení pro nadbytečný počet n měření

Toto řešení uskutečníme metodou MNČ. Za zprostředkující rovnici zvolíme rov. (6.7.5), kterou přepíšeme do tvaru

$$x_i x_A + y_i y_A + z_i z_A + \frac{1}{2} (d_{Ai}^2 - \rho_i^2 - r_A^2) = 0. \quad (6.7.7)$$

Jak se patří na MNČ, přisoudíme měřené hodnotě d_{Ai} opravu v_i , dosadíme do předchozí rovnice a upravíme. Postupně dostáváme

$$x_i x_A + y_i y_A + z_i z_A + \frac{1}{2} [(d_{Ai} + v_i)^2 - \rho_i^2 - r_A^2] = 0$$

$$x_i x_A + y_i y_A + z_i z_A + \frac{1}{2} (d_{Ai}^2 - \rho_i^2 - r_A^2) + d_{Ai} v_i + \frac{1}{2} v_i^2 = 0$$

a po vypuštění výrazu s v_i^2 a po prodělení celé linearizované zprostředkující rovnice výrazem d_{Ai} dostáváme

$$\frac{x_i}{d_{Ai}} x_A + \frac{y_i}{d_{Ai}} y_A + \frac{z_i}{d_{Ai}} z_A + \frac{1}{2} \frac{(d_{Ai}^2 - \rho_i^2 - r_A^2)}{d_{Ai}} = -v_i.$$

Po vynásobení (-1) a zavedení

$$a_i = -\frac{x_i}{d_{Ai}}, \quad b_i = -\frac{y_i}{d_{Ai}}, \quad c_i = -\frac{z_i}{d_{Ai}}, \quad l_i = \frac{1}{2} \frac{(r_A^2 + \rho_i^2 - d_{Ai}^2)}{d_{Ai}} \quad (6.7.8)$$

získáme konečný tvar rovnice oprav. Je

$$a_i x_A + b_i y_A + c_i z_A + l_i = v_i, \quad p_i, \quad (6.7.9)$$

kde p_i je váha. Řešme podle teorie v kap. 4.4.

PŘÍKLAD 16

Jsou dány souřadnice x'_i, y'_i, z'_i bodů P_i , kde $i = 1, 2, 3$ a 4 v pravouhlé pravotočivé prostorové soustavě S' . Dále jsou dány měřené vzdálenosti d_{Ai} z bodů P_i na body A , viz tab. 6.7.1. Jejich váhy $p_i = 1$.

Vypočtete prostorové souřadnice x'_A, y'_A, z'_A bodu A v souřadnicové soustavě S' , též viz obr. 6.7.1.

Tab. 6.7.1 Dané hodnoty pro příklad 1. Souřadnicová soustava S' .

Bod	x'_i	y'_i	z'_i	d_{Ai}^2
P ₁	1	2	1	6
P ₂	-3	3	-2	26
P ₃	-2	-1	3	30
P ₄	-1	1	4	14

Výpočet:

Úlohu budeme řešit MNČ, neboť počet měření $n = 4$ a je nadbytečný. Nejprve však, podle rov. (6.7.1), převedeme souřadnice ze souřadnicové soustavy S' do souřadnicové soustavy S , jejíž počátek O je v těžišti bodů P_i , viz tab. 6.7.2. Hodnoty ρ_i^2 jsou dále spočteny z rov. (6.7.3). Souřadnice počátku O , viz obr. 6.7.1, v soustavě S' jsou $-5/4$, $5/4$ a $3/2$.

Tab. 6.7.2 Výpočet hodnot v souřadnicové soustavě S pro řešení MNČ

Bod	x_i	y_i	z_i	ρ_i^2	a_i	b_i	c_i	l_i	d_{Ai}
P ₁	9/4	3/4	-1/2	47/8	-0,9186	-0,3062	0,2041	1,8881	$\sqrt{6}$
P ₂	-7/4	7/4	-7/2	147/8	0,3432	-0,3432	0,6864	0,1716	$\sqrt{26}$
P ₃	-3/4	-9/4	3/2	63/8	0,1369	0,4108	-0,2739	-1,1639	$\sqrt{30}$
P ₄	1/4	-1/4	5/2	51/8	-0,0668	0,0668	-0,6682	0,2339	$\sqrt{14}$
Σ	0	0	0	308/8					

Kontroly podle rov. (6.7.2) vyhovují. Z rov. (6.7.6) pak dostáváme

$$r_A = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^4 d_{Ai}^2 - \sum_{i=1}^4 \rho_i^2} = \frac{1}{2} \sqrt{76 - \frac{308}{8}} = 3,061862$$

Dále zjistíme souřadnice x_A , y_A , z_A vyrovnáním pomocí MNČ. Zprostředkující rovnicí oprav je rov. (6.7.9). Její koeficienty a_i , b_i , c_i a absolutní členy l_i udávají vztahy (6.7.8) a čtenář je rovněž najde v tab. 6.7.2. Podle kap. 4.4 zapišme soustavu zprostředkujících rovnic v maticovém tvaru

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{l} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}$$

kde matice vah \mathbf{P} je maticí jednotkovou. Po dosazení dostáváme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,9186 & -0,3062 & 0,2041 \\ 0,3432 & -0,3432 & 0,6864 \\ 0,1369 & 0,4108 & -0,2739 \\ -0,0668 & 0,0668 & -0,6682 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 1,8881 \\ 0,1716 \\ -1,1639 \\ 0,2339 \end{pmatrix},$$

z čehož $\mathbf{x} = (-\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} = (1,25 \quad 2,75 \quad 0,5)^T$. Prvky v posledním vektoru jsou souřadnice x_A , y_A , z_A v soustavě S . Pomocí rov. (6.7.1) získáme

$$x'_A = 1,25 - 5/4 = 0, \quad y'_A = 2,75 + 5/4 = 4, \quad z'_A = 0,5 + 3/2 = 2.$$

Závěrečnou a zásadní kontrolou je výpočet hodnot měřených délek pomocí souřadnic x'_i, y'_i, z'_i a vyrovnaných x'_A, y'_A, z'_A , tedy z výrazů

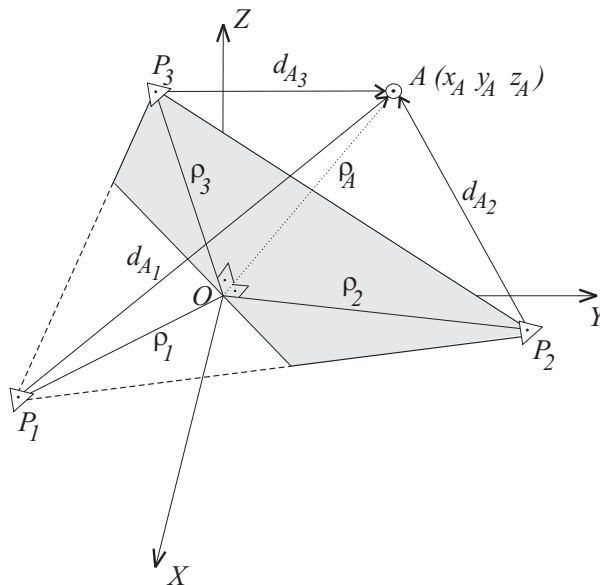
$$d_{Ai_{\text{vyp}}} = \left[(x'_i - x'_A)^2 + (y'_i - y'_A)^2 + (z'_i - z'_A)^2 \right]^{1/2}.$$

Výsledky jsou přesvědčující.

Tím je úloha vyřešena. Jelikož šlo o pouhou demonstraci předložené teorie, byly vstupní číselné hodnoty výhodně zvoleny a neodpovídají skutečnosti. Tím se také vysvětluje, že všechny opravy v_i v rov. (6.7.9) jsou prakticky nulové: $v_1 = -0,00015, v_2 = 0, v_3 = -0,00002, v_4 = 0$. Rovněž proto nebylo zapotřebí zavádět do vyrovnání podmínku $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = r_A^2$ a vyrovnání neprovádět jako zprostředkujících plus podmínkových pozorování, viz kap. 4.

6.7.2.2 Řešení pro nutný počet n měření

Počet $n = 3$. I zde posuneme souřadnicovou soustavu S' paralelně tak, aby těžiště trojúhelníka zadaných bodů $P_i, i = 1, 2, 3$, se stalo novým počátkem O souřadnicové soustavy S , viz obr. 6.7.2.



Obr. 6.7.1

Rovina $P_1P_2P_3$ tedy prochází počátkem. Z tohoto obrázku dále vyplývá, že

$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad (6.7.10)$$

kde ρ_i jsou těžnice, neboť trojúhelník byl vytvořen pomocí rov. (6.7.1). Zaměřovaným bodem je bod A , a to pomocí délek d_{A1}, d_{A2} a d_{A3} .

Opět platí

$$d_{Ai}^2 = (x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 + (z_i - z_A)^2,$$

kterou rozepíšeme a dostáváme rov. (6.7.5) a posléze rov. (6.7.6) ve tvaru

$$r_A^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (d_{Ai}^2 - \rho_i^2), \quad (6.7.11)$$

r_A viz obr. 6.7.2 jako tečkovaná spojnice OA . Souřadnice x_A, y_A, z_A máme řešením rov. (6.7.7) a (6.7.4). Tedy z rovnic

$$\begin{aligned} x_i x_A + y_i y_A + z_i z_A + l'_i &= 0 \\ x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - r_A^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.7.12)$$

kde $l'_i = \frac{1}{2}(d_{Ai}^2 - \rho_i^2 - r_A^2)$ a r_A určuje rov. (6.7.11), $i = 1, 2, 3$. Tím se zde řešený problém převedl na řešení dvou rovnic lineárních a jedné rovnice kvadratické.

PŘÍKLAD 17

Jsou dány souřadnice x'_i, y'_i, z'_i bodů P_i , kde $i = 1, 2, 3$, v souřadnicové soustavě S' , jakož i odpovídající měřené vzdálenosti d_{Ai} , viz tab. 6.7.3 z bodů P_i na bod A .

Vypočtete prostorové souřadnice x'_A, y'_A, z'_A bodu A v téže soustavě S' , viz obr. 6.7.2 i 6.7.1. Dané hodnoty viz tab. 6.7.3.

Tab. 6.7.1 Dané hodnoty pro příklad 2. Souřadnicová soustava S'

Bod	x'_i	y'_i	z'_i	d_{Ai}
P_1	-1	-1	2	$\sqrt{14}$
P_2	2	1	-1	$\sqrt{18}$
P_3	0	2	-2	$\sqrt{26}$

Výpočet:

Výpočet bude uskutečněn bez použití způsobů MNČ. Tedy přímým řešením rov. (6.7.12). Pročež musíme opět převést souřadnice ze soustavy S' do soustavy S pomocí rov. (6.7.1).

Použito však bude výrazů $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x'_i = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y'_i = \frac{2}{3}$ a $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 z'_i = -\frac{1}{3}$, viz tab. 6.7.4, kde je

rovněž uvedeno ρ_i , získané z rov. (6.7.10). Kontroly podle rov. (6.7.2) vyhovují. Z

rov. (6.7.11) pak dostáváme $r_A = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 d_{Ai}^2 - \sum_{i=1}^3 \rho_i^2\right)/3} = \sqrt{(58-18)/3} = 3,651$. Pomocí r_A

pak získáme absolutní členy l'_i pro rov. (6.7.12). Uvádí je rovněž tab. 6.7.4.

Tab. 6.7.2 Výpočet hodnot v souřadnicové soustavě S pro přímé řešení

Bod	x_i	y_i	z_i	ρ_i	l'_i
P_1	$-4/3$	$-5/3$	$7/3$	3,162	-4,667
P_2	$5/3$	$1/3$	$-2/3$	1,826	0,667
P_3	$-1/3$	$4/3$	$-5/3$	2,160	4,000
Σ	0	0	0		

Pro konkrétní řešení sestavíme rov. (6.7.12), pro $i = 1, 2, 3$, viz tab. 6.7.4. v obecném tvaru zní

$$\begin{aligned} x_1 x_A + y_1 y_A + z_1 z_A + l'_1 &= 0 & / y_2 & / x_3 \\ x_2 x_A + y_2 y_A + z_2 z_A + l'_2 &= 0 & / - y_1 & \\ x_3 x_A + y_3 y_A + z_3 z_A + l'_3 &= 0 & / - x_1 & \\ x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - r_A^2 &= 0 & & \end{aligned} \quad (6.7.13)$$

Po naznačených úpravách získáváme výrazy

$$x_A = \frac{y_1 l'_2 - y_2 l'_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} + \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} z_A, \quad (6.7.14)$$

$$y_A = \frac{x_3 l'_1 - x_1 l'_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1} + \frac{x_3 z_1 - x_1 z_3}{x_1 y_3 - x_3 y_1} z_A, \quad (6.7.15)$$

za které zavedeme $x_A = \alpha + \beta z_A$ a $y_A = \gamma + \delta z_A$ a po dosazení do čtvrté rov. (6.7.13) je

$$A z_A^2 + B z_A + C = 0, \quad (6.7.16)$$

kde $A = 1 + \beta^2 + \delta^2$, $B = 2(\alpha\beta + \gamma\delta)$, $C = \alpha^2 + \gamma^2 - r_A^2$. Řešení je dvouznačné, takže pro z_A dostáváme dva kořeny z rov. (6.7.16) a zrovna tak pro x_A a y_A z rov. (6.7.14) a (6.7.15). Kontrolou je dosazení do rov. (6.7.16) a (6.7.13). Výsledky jsou

$$\begin{aligned} (x_A)_1 &= 0,667 & (y_A)_1 &= 1,333 & (z_A)_1 &= 3,333 \\ (x_A)_2 &= 0,117 & (y_A)_2 &= -3,613 & (z_A)_2 &= -0,514 \end{aligned} \quad (6.7.17)$$

kde indexy 1 a 2 představují 1. a 2. řešení. Z nich platí jen jedno. Kontroly dosazením do čtyř rov. (6.7.13) ovšem vyhovují. Převod do souřadnicové soustavy S' uskutečníme pomocí rov. (6.7.1). Pro 1. kořeny platí

$$\begin{aligned} (x'_A)_1 &= (x_A)_1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i = 0,667 + \frac{1}{3} = 1 \\ (y'_A)_1 &= (y_A)_1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i = 1,333 + \frac{2}{3} = 2 \\ (z'_A)_1 &= (z_A)_1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 z_i = 3,333 - \frac{1}{3} = 3 \end{aligned}$$

Stejně učiníme i pro 2. kořeny rov. (6.7.17). Získáváme

$$(x'_A)_2 = 0,450 \quad (y'_A)_2 = -2,946 \quad (z'_A)_2 = 0,847.$$

Závěrečnou a zásadní kontrolu získaných souřadnic v soustavě S' , je jejich dosazení do vztahu

$$d_{Ai}^2 = (x'_i - x'_A)^2 + (y'_i - y'_A)^2 + (z'_i - z'_A)^2.$$

Dosazením vyplývá, že reálné jsou pouze 1. kořeny. Konečně ověření platnosti jednotlivých kořenů může provést měřič eventuálně i počtář.

Pilnému a zvědavému čtenáři doporučuji provést řešení tohoto příkladu obdobně, jak činí MNČ.

LITERATURA:

- [1] Giering O.: Analytische Behandlung des räumlichen Trilaterationsproblems [4, 6, 0, 0]. Deutsche geodätische Kommission, Reihe A, Nr. 104, München 1986.
- [2] Hradilek L.: Vysokohorská geodézie. Nakladatelství ACADEMIA, Praha 1984.
- [3] Jordan – Eggert – Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde. Band VI.: K.Rinner, F. Benz: Die Entfernungsmessung mit elektro-magnetischen Wellen und ihre geodätische Anwendung. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1966.
- [4] Kabeláč J.: Ausgleichung eines Dreieckes des Astronomischgeodätischen Netzes mittels Methode der dreidimensionalen Geodäsie. Práce stavební fakulty, Praha 1978.
- [5] Kotva J.: Určení souřadnic bodu protínáním při měřené délce a směrníku. Vojenský topografický obzor, 1972, str. 51 – 62.
- [6] Rinner K.: Geometrie mit Raumstrecken. Zeitschrift für Vermessungswesen, 83 (1958), str. 91 – 105.
- [7] Wolf H.: Die Grundgleichungen der dreidimensionalen Geodäsie in elementarer Darstellung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 88 (1963), str. 225 – 233.