

7 Triangulace na vysoké cíle – síť 0-tého řádu – hvězdná triangulace

7.1 Úvodem několik slov na vysvětlenou

Námětem i obsahem předkládaného textu, jak bylo již vzpomenuto v předmluvě, mělo být pojednání o vyšší geodézii. Tento název, jak se jeví, je nevhodný ze dvou důvodů:

- předně s ním nesouhlasí mnozí, kteří v oboru vyšší geodézie nepracují. A těch je dost a navíc se značným vlivem, což je jev všeobecně lidský,
- s rostoucím vlivem technizace a vědeckých poznatků přijala geodézie zcela nové metody měření a zpracování. Jednou z nich je využívání kosmických jevů a speciálně umělých družic Země (UDZ). Je to ještě vyšší geodézie?

Co z toho vyplývá? Především náplň vyšší geodézie se obohatila. A to do značné míry. Svou kvalitou a bohatstvím sledovaných metod. Dézie^{*)} se již nezajímá jen o Zemi, ale i o jiná tělesa sluneční soustavy. A k jejich studiu a jistěže i ke studiu Země nepoužívá jen prostoru a jevů na Zemi, ale i v blízkém i vzdáleném kosmu.

Přejdeme proto z názvu „Vyšší geodézie“ k názvu „Planetární geodézie“?! Či k jakému? Či nepřejdeme?

A ještě jednu poznámku. Je totiž pozoruhodné, jak se mnozí staví k těmto změnám nepřátelsky. Příkladem je odpor ke všemu, co souvisí s hvězdným nebem. To bylo, je a patrně bude. A nejde zde o pilíře naší geodézie, ale i o studenty v extrému druhém. Myslím, že vysvětlením je myšlenková lenost, která napadá lidská individua bez rozdílu, nezávisle na věku.

A je to velká, citelná ztráta. Vždyť tím by obor jen rostl a nabýval na důležitosti a tím i na vážnosti nejen odborné, ale i společenské. A proto přejte doslovnému naplnění ušlechtilé myšlenky „Per aspera ad astra“.

A protože v dalším odborném textu přecházíme z oné klasické „vyšší geodézie“ do řekněme „planetární geodézie“, je nutné upozornit členění na doplnění znalostí ze sférické astronomie. Ač je v dostačující míře uvedena ve skriptech [11], jsou v dalším popsány aspoň dvě nezákladnější souřadnicové soustavy, obzorníková a rovníková, kterých bude v kap. 7 i 8 nejen používáno, ale s jejich užitím budou vypracovány další metody pro budování geodetických základů, zejména geodetických sítí.

7.2 Dvě základní souřadnicové soustavy sférické astronomie

Použijeme skriptum [11], ze kterého vyjmeme upravenou a zredukovanou kap. 1.3.

Abychom mohli zavést sférickou souřadnicovou soustavu, musíme zvolit sféru (kouli) s určitým poloměrem a základní směry a roviny, které je možné fyzikálně realizovat. Z matematického hlediska je vhodné zvolit poloměr koule roven 1 (Gaussova sféra).

Za základní směry zvolíme: **svislici v daném bodě pozorování nebo směr rotační osy Země**. Za základní roviny volíme: **rovinu horizontu (obzorníku) v daném bodě**

^{*)} Podle učebnice J. Ryšavého: Nižší geodézie, s.5, znamená doslovný překlad názvu geodesie „dělení země, půdy“, což charakterizovalo činnost starověkých měřičů. Podle F.R.Helmerta je to „věda o měření a mapování zemského povrchu“. Je-li tento pojem přenesen na Měsíc či obecně na planetu, mluvíme o selenodesii či planetodesii. Podobně i pro další tělesa sluneční soustavy.

pozorování nebo rovinu rovníku. Půjde tedy o

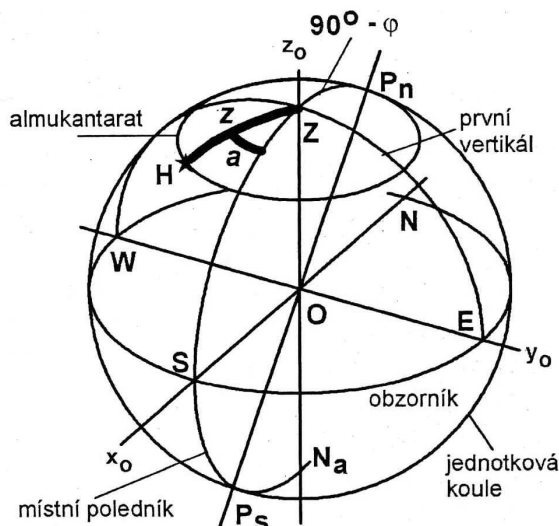
- **obzorníkovou souřadnicovou soustavu,**
- **rovňíkovou souřadnicovou soustavu** (závislou na čase),
- **rovňíkovou souřadnicovou soustavu** (nezávislou na čase).

Některé z uvedených souřadnicových soustav dělíme ještě podle *polohy středu koule* na

- **topocentrickou,**
- **geocentrickou.**

7.2.1 Obzorníková souřadnicová soustava

Základním směrem obzorníkové souřadnicové soustavy je směr svislice v bodě, ze kterého pozorujeme kosmické objekty. Do tohoto bodu umístíme střed jednotkové koule O – viz obr. 7.2.1. Svislice protne jednotkovou kouli v bodě Z , který nazýváme **zenit** (nadhlavník), a v bodě N_a , který nazýváme **nadir**. Rovina kolmá ke svislici procházející bodem O se nazývá rovina obzorníku. Protíná jednotkovou kouli v hlavní kružnici, která se nazývá **obzorník** nebo též horizont. Horizont rozděluje kouli na dvě poloviny, z nichž pouze horní je viditelná. Vedeme-li rovnoběžku s rotační osou bodem O , protíná jednotkovou kouli v **severním pólu** P_n a **jižním pólu** P_s .



Obr. 7.2.1

Hlavní kružnice procházející zenitem a nadirem se nazývají **výškové kružnice (vertikály)**. Z nich jsou dvě významné, a to místní poledník (meridián) a první vertikál. **Místní poledník** definujeme jako kružnici procházející zenitem, nadirem, severním a jižním pólem. Rovina proložená touto kružnicí se nazývá rovina místního poledníku. Slunce při svém zdánlivém pohybu po obloze prochází touto rovinou v *pravé místní poledne* (termíny budou upřesněny v dalších odstavcích), proto název poledník. Rovina prvního vertikálu prochází zenitem a nadirem a je kolmá na rovinu místního poledníku. Průsečnice této roviny s jednotkovou koulí se nazývá **první vertikál**. Průsečky místního poledníku, resp. prvního vertikálu s obzorníkem se nazývají **severní bod N, jižní bod S, západní bod W a východní bod E**.

Obzorník a poledník definují obzorníkovou soustavu. Sférické souřadnice se nazývají **azimut a , zenitová vzdálenost z resp. výška h hvězdy.**

Zvolme na jednotkové kružnici polohu hvězdy H a proložme hvězdou svislou rovinu (rovinu vertikálu).

Azimut a je pak úhel, který svírá rovina vertikálu s rovinou místního poledníku. Měří se od jižní větve místního poledníku v matematicky záporném smyslu (k západu) a nabývá hodnot v intervalu 0° až 360° .

Zenitová vzdálenost z je úhel měřený po výškové kružnici od zenitu ke hvězdě. Nabývá hodnot 0° až 180° . Výška hvězdy h je úhel, který svírá směr ke hvězdě s rovinou obzorníku. Mezi výškou a zenitovou vzdáleností platí jednoduchý vztah

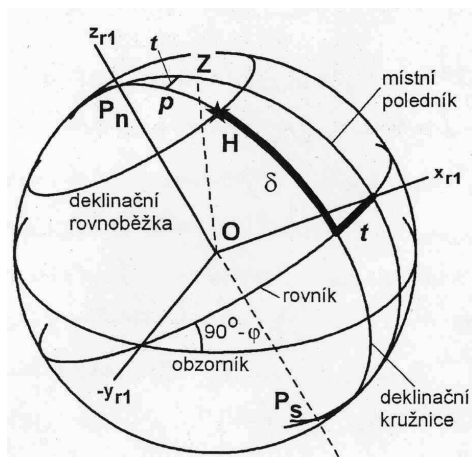
$$z + h = 90^\circ.$$

7.2.2 Rovníkové souřadnicové soustavy

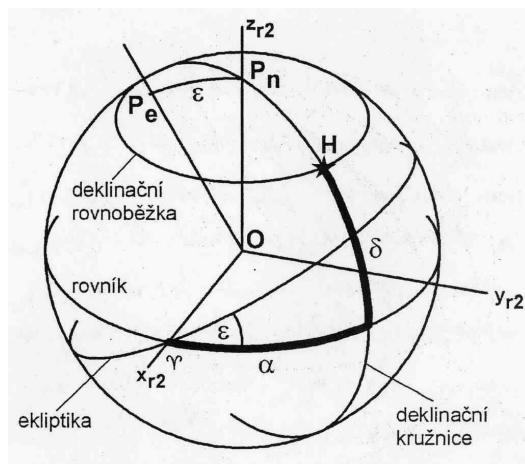
Základním směrem rovníkové soustavy je směr osy rotace Země, která protne jednotkovou kouli v severním světovém pólu P_n a jižním světovém pólu P_s , viz obr. 7.2.2. Základní rovinou je rovina rovníku, kolmá k ose rotace a procházející počátkem O . **Rovina rovníku** protne kouli v hlavní kružnici, kterou nazýváme **světovým rovníkem**. Na obr. 7.2.2 je označena jako rovník. Roviny procházející světovými póly nazveme deklinačními rovinami a jejich průsečnice s jednotkovou koulí **deklinační kružnice**, viz obr. 7.2.2. Polohu hvězdy vůči rovníku určuje souřadnice, zvaná **deklinace** δ . Je to úhlová vzdálenost hvězdy od rovníku měřená po deklinační kružnici. Deklinace nabývá hodnot v intervalu -90° až 90° , měřeno od jižního pólu k severnímu pólu. Vedlejší roviny rovnoběžné s rovinou rovníku protínají jednotkovou kouli v kružnicích, které se nazývají **deklinační rovnoběžky**. Po deklinačních rovnoběžkách hvězdy vykonávají svůj zdánlivý denní pohyb jako odraz skutečné rotace Země. Polohu hvězdy vůči pólu můžeme také vyjádřit pomocí **pólové vzdálenosti** p . Je to úhlová vzdálenost hvězdy, měřená po deklinační kružnici od severního pólu. Pro deklinaci a pólovou vzdálenost platí jednoduchý vztah

$$\delta + p = 90^\circ.$$

Druhou rovníkovou souřadnici můžeme volit dvěma způsoby, podle zvolené pomocné základní roviny. Rozlišujeme tak **první a druhou rovníkovou souřadnicovou soustavu** S_{r1} a S_{r2} .



Obr. 7.2.1 Rovníková soustava S_{r1}



Obr. 7.2.2 Rovníková soustava S_{r2}

První rovníková souřadnicová soustava S_{r1} , „závislá na čase“

V první rovníkové souřadnicové soustavě, viz obr. 7.2.2., zvolíme za základní rovinu rovinu místního poledníku. Polohu hvězdy pak určuje **hodinový úhel** t a **deklinace** δ , která již byla definována. Hodinový úhel je úhel, který svírá rovina místního poledníku s deklinační rovinou, procházející hvězdou. Měříme ho od jižní větve místního poledníku v matematicky záporném smyslu. Může nabývat hodnot 0° až 360° , většinou ho však vyjadřujeme v hodinové míře v intervalu 0^h až 24^h .

Jak vyplývá z definice, hodinový úhel je závislý na poloze místního poledníku vůči hvězdám. Ten však v důsledku rotace Země mění neustále svou polohu a z toho vyplývá i změna hodinového úhlu. První rovníková soustava je tedy vázána na Zemi a spolu s ní rotuje. Má proto zásadní význam pro měření času odvozeného z rotace Země, to je také důvod, proč je hodinový úhel vyjadřován v hodinové míře.

Podle obr. 7.2.2 též platí, že úhel, který svírá rovina rovníku s rovinou obzorníku, je roven $90^\circ - \varphi$.

Druhá rovníková souřadnicová soustava S_{r2} , „nezávislá na čase“

Země obíhá kolem Slunce v rovině, která svírá s rovinou světového rovníku úhel přibližně rovný $23,5^\circ$ a nazývá se **rovina ekliptiky**. Název pochází z řeckého slova „ekleipsis“ a znamená zatmění. Ekliptika protíná světový rovník ve dvou bodech, obr. 7.2.3. Průsečík, kterým prochází Slunce v den jarní rovnodennosti, nazýváme **jarní bod** a označujeme symbolem souhvězdí Berana, Υ . Druhý průsečík, kterým prochází Slunce v den podzimní rovnodennosti, se nazývá **podzimní bod** a označujeme jej symbolem souhvězdí Vah, Ω .

Za pomocnou základní rovinu druhé rovníkové soustavy zvolme deklinační rovinu procházející jarním bodem. Ji zvolíme za nulovou. Polohu hvězd v této soustavě určujeme pomocí **rektascenze** α a již definované **deklinace** δ . Rektascenze je úhel mezi deklinační rovinou procházející jarním bodem a deklinační rovinou hvězdy, nebo na jednotkové kouli úhel mezi jarním bodem a deklinační kružnicí hvězdy, který měříme od jarního bodu Υ v matematicky kladném smyslu od $0h$ do $24h$. Někdy se také označuje R z latinského „ascensio recta – pravá vzdálenost“.

Porovnáním obou soustav zjišťujeme, že deklinace je v obou soustavách stejná, „nezávislá“ na rotaci Země a na poloze pozorovatele, ale hodinový úhel a rektascenze se liší. Uvědomme si, že rektascenze nezávisí na poloze místa pozorovatele ani na rotaci Země, protože se měří od jarního bodu. Z těchto důvodů druhá rovníková soustava nerotuje a je do jisté míry „nezávislá“ na čase. Proto se používá pro sestavení katalogů (efemerid) souřadnic hvězd, Slunce, Měsíce, planet a družic.

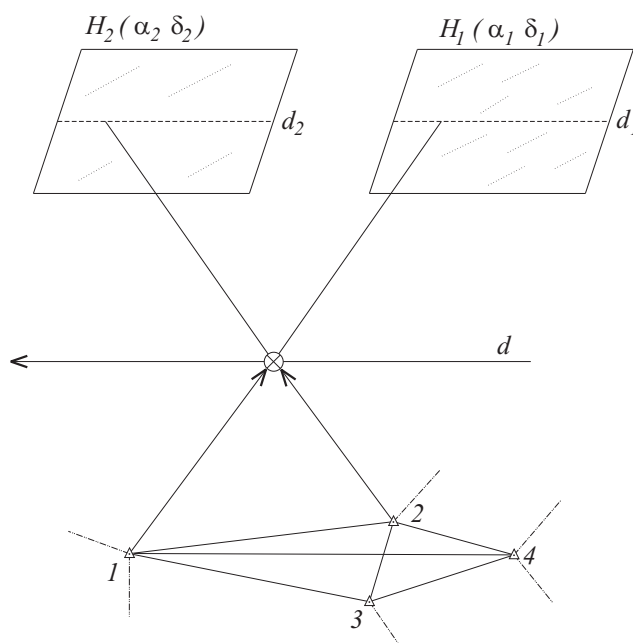
7.3 Základní geometrické úlohy družicové geodézie (DG)

Kromě geometrických úloh existují ještě úlohy orbitální a dynamické, o kterých bude pojednáno později v části XI. Protože tato kap. 7.3 spadá do IV. části, nazvané „geodetické sítě“, budeme se zde zabývat toliko těmi úlohami geometrickými, které s geodetickými sítěmi úzce souvisí.

Základní geometrickou úlohu formuloval a i prakticky ověřil finský geodet Y.Väisälä a je popsána např. v [39] nebo [21]. Její vznik, tj. ověřování, zkušební měření např. ve vysokých horách, studium oprav a sestavování teorie však spadají již do let předválečných.

Ještě dříve, než dojde k popisu geometrických metod poznamenejme, že tyto metody sehrály svou nezanedbatelnou úlohu na počátku družicové éry a v současnosti jsou však téměř zcela opuštěny. Jejich, silně zestručněné, uvedení, má zde opodstatnění v porozumění vývoje a v pedagogickém smyslu.

Princip úlohy pozůstává v tom, že z družicových stanic 1 a 2, obr. 7.3.1, je současně či kvazisosoučasně vyfotografována dráha d umělé družice Země (UDZ), jež se promítne na hvězdné pozadí. Expozice trvá po dobu přeletu a je prováděna speciálními pevnými komorami, např. [8], [14] aj., opatřenými uzávěrkami, které pracují s přesností řádově 0,1 ms nebo lepší. S touto přesností jsou přerušovány expozice dráhy družice, takže se na snímku jeví dráhy d_1 a d_2 jako přerušované. Čas je s uvedenou přesností zaznamenáván. Rovněž expozice hvězd, H_1 a H_2 na obr. 7.3.1, jsou přerušované. Přesnost v jejich časovém záznamu je postačující na 10 ms.



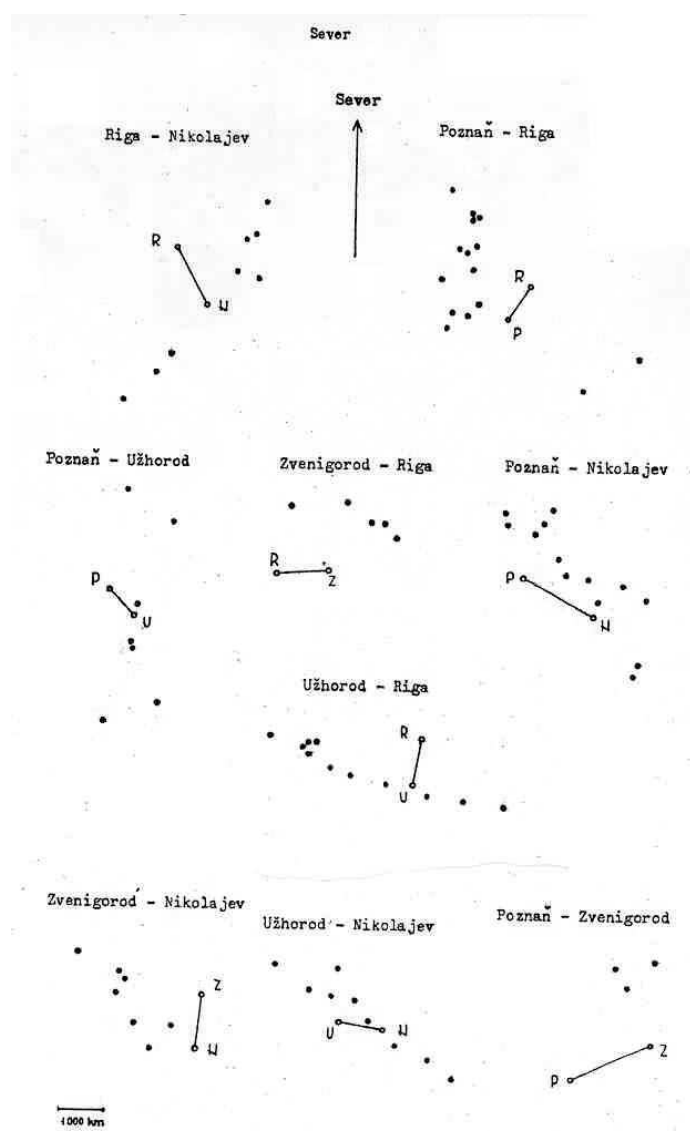
Obr. 7.3.1

Popsaný postup platí pro družicové fotografické komory, které jsou pevně spojeny se Zemí včetně fotografického materiálu. Jinou variantou byly komory, jež byly opatřeny hodinovým pohybem za hvězdami. Nejdokonalejšími byly komory, které mohly střídavě provádět pohyb za hvězdami a pohyb za družicí. Tím se zvýšila možnost sledování/exponování slabých družic.

Ve všech těchto případech následovalo proměření obrazů hvězd i obrazů UZD na koordinátometru s přesností min. $1 \mu m$. Pomocí různých transformačních metod, viz např. [2], [5], [6], [17], [20], [24], [25], [26], [38], jsou snímkové souřadnice UZD převedeny na topocentrické rovníkové souřadnice α_{1i} , δ_{1i} , α_{2i} , δ_{2i} (rektascenze a deklinace), případně na t_{1i}^{gr} , δ_{1i} , t_{2i}^{gr} , δ_{2i} (hodinový úhel greenwichský a deklinace), viz kap. 7.2, kde $i = 1, \dots, n$ a n je počet proměřených a použitých poloh UZD, které jsou společné pro oba snímky, obr. 7.3.1.

Expozice ze stanic 1 a 2 nejsou zpravidla přesně současné (simultánní, synchronní), ale jsou kvazisoučasné. Na přesně stejné okamžiky se expozice převádějí matematickou cestou.

Získáním směrových veličin z obou snímků na polohu UDZ, která je společná pro obě stanice 1 i 2, získáme jednu dvojici synchronních pozorování, které nám definují jednu tzv. synchronní rovinu $12\otimes$, viz obr. 7.3.1. Další synchronní roviny je možno získat z dalších expozic použité dvojice snímků. Jistě je žádoucí, aby bylo co nejvíce takovýchto vhodných synchronních rovin. Jejich polohu vůči družicovým stanicím 1 a 2 charakterizuje tzv. poddružicový bod, což je kolmý průmět družice (právě exponované) na povrch Země (Zemi označujeme \ominus nebo \oplus). Obr. 7.3.2 ukazuje konkrétní situaci při měření, prováděných v letech 1962 až 1966, na jasné družice Echo 1, Echo 2 a PAGEOS, bližší viz [33]. Optimální je, aby se tyto poddružicové body nacházely na ose symetrie spojnice obou zúčastněných družicových stanic. Tímto je princip metody hvězdné (stelární, astronomické) triangulace, jak doufám, vysvětlen.



Obr. 7.3.2

Bližší o geodetických aplikacích DG, jmenovitě pro budování geodetických sítí, je uvedeno v literatuře [39] a [33].

7.4 Teorie Väisälä-ho metody hvězdné triangulace*) - síť 0-tého řádu

Zavedme nejprve souřadnicovou soustavu pravoúhlých prostorových souřadnic X, Y, Z , o které platí:

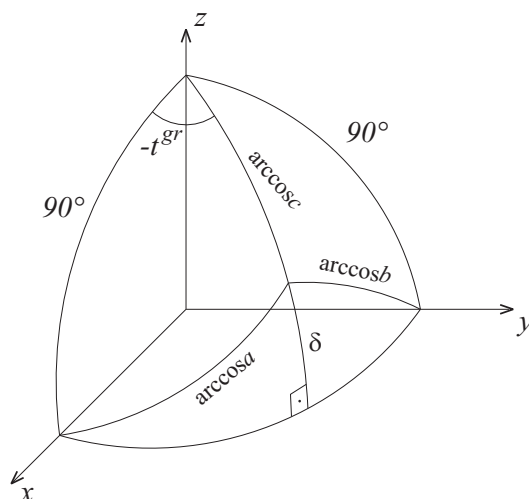
- osa X leží v průsečnici rovin greenwichského astronomického poledníku a astronomického rovníku,
- osa Y leží v rovině astronomického rovníku a její astronomická délka je 90° směrem východním,
- osa Z je rovnoběžná s okamžitou severní rotační poloosou,
- počátek tohoto systému nemusí ležet v těžišti Země.

7.4.1 Část 1 – Určení směru strany sítě

Astronomické rovníkové souřadnice měřených a hledaných směrů jsou: hodinový úhel greenwichský t^{gr} a deklinace δ . Zahrnut je vliv precese, nutace a aberace světla.

V kap. 6.2 byla diskutována podmínka komplanarity, rov. (6.2.1), kterou použijeme i zde. Směry $1\otimes, 2\otimes$ a 12 , viz obr. 7.3.1 musí totiž ležet v jedné rovině. Tyto směry vyjádříme pomocí směrových kosinů, takže platí determinant

$$\begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{1\otimes} & b_{1\otimes} & c_{1\otimes} \\ a_{2\otimes} & b_{2\otimes} & c_{2\otimes} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.4.1)$$



Obr. 7.4.1

Protože měřenými i hledanými veličinami jsou hodinové úhly a deklinace, zavedeme vztahy, viz obr. 7.4.1,

$$a = \cos t^{gr} \cos \delta, \quad b = -\sin t^{gr} \cos \delta, \quad c = \sin \delta, \quad (7.4.2)$$

v nichž jsme vynechali indexy. Tyto výrazy dosadíme do rov. (7.4.1), determinant dělíme příslušnými kosiny deklinací, upravíme a dostáváme

*) O dalších úlohách DG vhodných pro geodézii je pojednáno v kap. 8 a v části XI.

$$D_{12\otimes} = \begin{vmatrix} \cos t_{12}^{gr} & \sin t_{12}^{gr} & tg \delta_{12} \\ \cos t_{1\otimes}^{gr} & \sin t_{1\otimes}^{gr} & tg \delta_{1\otimes} \\ \cos t_{2\otimes}^{gr} & \sin t_{2\otimes}^{gr} & tg \delta_{2\otimes} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.4.3)$$

ve kterém indexy 1 a 2 představují družicovou stanici 1 a 2 a $\otimes = 1, \dots, n$, kde n je celkový počet synchronních rovin. Neznámými a hledanými veličinami jsou rovňkové souřadnice t_{12}^{gr} , δ_{12} směru 12, které nahradíme vztahy

$$t_{12}^{gr} = t_{120}^{gr} + dt_{12}, \quad \delta_{12} = \delta_{120} + d\delta_{12}.$$

V nich t_{120}^{gr} , δ_{120} jsou přibližné hodnoty a dt_{12} , $d\delta_{12}$ jejich hledané opravy. Zjistíme je MNČ vyrovnaním zprostředkujících pozorování, viz kap. 4.4. Za tímto účelem je nutno rov. (7.4.3) linearizovat pomocí Taylorova rozvoje. Dostaneme rovnici oprav

$$a_{12\otimes} dt_{12}^{gr} + b_{12\otimes} d\delta_{12} + l_{12\otimes} = v_{12\otimes},$$

kde

$$a_{12\otimes} = \begin{vmatrix} -\sin t_{120}^{gr} & \cos t_{120}^{gr} & 0 \\ \cos t_{1\otimes}^{gr} & \sin t_{1\otimes}^{gr} & tg \delta_{1\otimes} \\ \cos t_{2\otimes}^{gr} & \sin t_{2\otimes}^{gr} & tg \delta_{2\otimes} \end{vmatrix},$$

$$b_{12\otimes} = tg \delta_{120} \sin(t_{2\otimes}^{gr} - t_{1\otimes}^{gr})$$

a absolutní člen

$$l_{12\otimes} = D_{12\otimes}$$

po zavedení přibližně známých veličin t_{120}^{gr} , δ_{120} do rov. (7.4.3). Absolutní člen je odchylka úhlu normály k rovině $12\otimes$ a přibližného směru 12_0 od 90° .

Po připojení vah, viz např. [36], zavedení oprav a vyloučení nevhodných měření následuje vyrovnaní MNČ, čímž je ukončena 1. část vyrovnaní. Jejím výsledkem jsou rovňkové souřadnice t^{gr} a δ (indexy jsou vynechány) pro jednu každou stranu sítě 12, 23, 31, atd., viz obr. 7.3.1, z nichž každá byla určena samostatně. Mezi nimi není tedy žádné závislosti.

7.4.2 Část 2 – Vyrovnaní celé sítě

V předchozí části 7.4.1 byly vypočteny hodnoty t^{gr} a δ (indexy jsou vynechány) směrů stran družicové prostorové sítě z pozorování UDZ. Tyto směry nemají žádnou vzájemnou vazbu. Každý z nich byl totiž určen samostatně. Není tedy zajištěna podmínka komplanarity tří směrů v každém trojúhelníku sítě. Aby bylo dosaženo toho, že tyto tři směry pro jeden každý trojúhelník leží ve společné rovině, je opět nutné zavést podmínku komplanarity, danou rov. (7.4.3), resp. již rov. (6.2.1). Tuto podmínku zapíšeme, např. pro trojúhelník 123, když prostě v rov. (7.4.3) zaměníme indexy. Je pak

$$D_{123} = \begin{vmatrix} \cos t_{12}^{gr} & \sin t_{12}^{gr} & tg \delta_{12} \\ \cos t_{23}^{gr} & \sin t_{23}^{gr} & tg \delta_{23} \\ \cos t_{31}^{gr} & \sin t_{31}^{gr} & tg \delta_{31} \end{vmatrix} = 0 \quad (7.4.4)$$

Na rozdíl od determinantu rov. (7.4.3), kde jsou neznámými/vyrovnanými veličinami jen dvě veličiny s indexem 12, je v rov. (7.4.4) neznámých veličin šest. Po linearizaci rov. (7.4.4) dostáváme linearizovanou přetvořenou rovnici podmínkovou ve tvaru

$$a_{t_{12}} dt_{12}^{gr} + a_{t_{23}} dt_{23}^{gr} + a_{t_{31}} dt_{31}^{gr} + a_{\delta_{12}} d\delta_{12} + a_{\delta_{23}} d\delta_{23} + a_{\delta_{31}} d\delta_{31} + D_{1230} = 0, \quad (7.4.5)$$

kde a_{index} a b_{index} jsou derivace výrazu D_{123} podle jednotlivých hledaných neznámých. Jejich význam je uveden v [4].

Zbývá určit počet těchto podmínkových rovnic. Uvažujme: jsou-li dány v trojúhelníku dva směry hodinovými úhly a deklinacemi a z 3. směru jen jedna z těchto veličin, je možno druhou již vypočítat z podmínky komplanarity. Je-li i tato veličina dána, je nadbytečná, a je dlužno přistoupit k vyrovnání. Zkoumejme toto blíže. Předpokládejme, že směry spojnic (stran) trojúhelníku jsou vždy dány jak hodinovým úhlem t , tak deklinací δ . Označme: m – počet všech pozorování, v – počet nutných pozorování, r – počet nadbytečných pozorování = počet podmínkových rovnic. Pro 3 body (např. 1, 2, 3 v obr. 7.3.1) platí: $m = 6$, $v = 5$, $r = 1$. Pro čtyři body (např. 1, 2, 3 a 4) platí: $m = 12$, $v = 8$, $r = 4$. Dále pro n vrcholů máme $s = \frac{n}{2}(n-1)$ spojnic a všech měření $m = 2s = n(n-1)$. Počet nutných měření jest $v = 5 + 3(n-3) = 3n - 4$, takže počet nadbytečných měření

$$r = m - v = n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2$$

a je roven počtu podmínkových rovnic. Celá tato úvaha platí, jsou-li známy obě sférické souřadnice t^{gr} a δ pro všechny možné spojnice (strany). Pakliže však 1 spojnice není měřena, pak odpadají 2 měření a pro s naměřených spojnic odpadne $2s$ měření. Celkový počet nadbytečných měření rovný počtu výsledných podmínkových rovnic je pak $r' = r - 2s' = (n-2)^2 - 2s'$, kde s' je počet neměřených spojnic. Tab. 7.4.1 uvádí číselné příklady.

Tab. 7.4.1 n je počet vrcholů, s počet všech stran (spojnic), m je počet všech, v počet nutných a r počet nadbytečných měření = počtu podmínkových rovnic.

| n | s | m | v | r |
|-----|--------------------|----------|--------|-----------|
| 3 | 3 | 6 | 5 | 1 |
| 4 | 6 | 12 | 8 | 4 |
| 5 | 10 | 20 | 11 | 9 |
| 6 | 15 | 30 | 14 | 16 |
| ⋮ | | | | |
| n | $\frac{n}{2}(n-1)$ | $n(n-1)$ | $3n-4$ | $(n-2)^2$ |

Po sestavení příslušných podmínkových rov. (7.4.5) následuje vyrovnaní MNČ podle podmínkových pozorování, viz kap. 4.3. Příklad takovýchto měření a výpočtů je uveden např. v [33]. Splněním podmínky (7.4.4) je dosaženo toho, že směry stran v trojúhelnících 1, 2, 3; 1, 3, 4; ..., viz obr. 7.3.1, jsou komplanární a tuto síť je možno považovat za vyrovnanou. Je nazývána síť 0-tého řádu a my se o ní ještě zmíníme v kap. 7.7.

7.5 Zobecnění Väisälä-ho metody hvězdné triangulace

Zobecněním se zde rozumí to, že kromě měřených směru jsou rovněž měřeny vzdálenosti mezi družicovou stanicí a UDZ. Tato měření se provádějí laserovými aparaturami*).

Zavedením délkových veličin se ovšem mění i teorie zobecnění metody hvězdné triangulace. Tab. 7.5.1 uvádí různé případy měřených veličin. Vycházet budeme ze vztahu (vodorovná čárka znamená vektor)

$$\bar{d} = \bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2, \quad (7.5.1)$$

viz obr. 7.5.1. Vektorům přisoudíme směrové kosiny a, b, c, a_i, b_i, c_i pro $i = 1, 2$. Rov. (7.5.1) rozepíšeme do souřadnicových složek. Jsou

$$d \cdot a = \rho_1 a_1 - \rho_2 a_2, \quad d \cdot b = \rho_1 b_1 - \rho_2 b_2, \quad d \cdot c = \rho_1 c_1 - \rho_2 c_2, \quad (7.5.2)$$

kde význam směrových kosinů udávají rov. (7.4.2), v nichž nejsou uvedeny indexy. Neznámými jsou d, a, b, c či lépe d, t^{gr}, δ (opět bez indexů) spojnice (strany) 12. Měřenými d_i, t_i^{gr}, δ_i , z nichž ovšem některé mohou být vynechány, jak ukazuje tab. 7.5.1.

Tab. 7.5.1 Různé případy měřených veličin pro zobecněnou Väisälä-ho metodu hvězdné triangulace

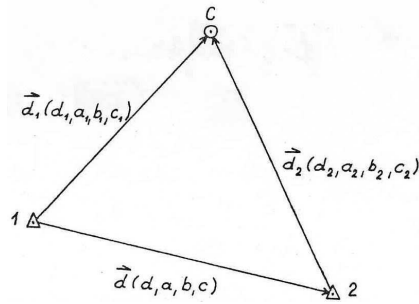
| Případ | Je měřeno **) | | Počet rovnic oprav |
|--------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------|
| 1 | $d_1 \quad t_1^{gr} \quad \delta_1$ | $d_2 \quad t_2^{gr} \quad \delta_2$ | 3 |
| 2 | $d_1 \quad t_1^{gr} \quad \delta_1$ | $t_2^{gr} \quad \delta_2$ | 2 |
| 3 | $d_1 \quad t_1^{gr} \quad \delta_1$ | d_2 | 1 |
| 4 | $t_1^{gr} \quad \delta_1$ | $t_2^{gr} \quad \delta_2$ | 1 |

*) Obvykle je užíváno rubínových pulsních laserů o energii 1 Joule a o vlnové délce 694,3 nm. Úzký divergenční úhel 1' až 3' vyžaduje odpovídající přesnost v justáži celé aparatury, jejímiž hlavními součástmi jsou zdroj světelného impulsu (vlastní laser), receptor odražených paprsků (např. reflektor o průměru asi 30 – 50 cm) s citlivým fotonásobičem, hledáček, naváděcí zařízení, chladicí zařízení atp. Vše je umístěno na 2 až 4 - osé montáži. Časový interval Δt mezi příjmem a vysláním světelného signálu je měřen elektronickým čítačem s přesností až 0,1 ns a přiřazen k času UTC s přesností 1 μ s. Vzdálenost d stanoviště – UDZ se získá ze vzorce

$$d = \frac{1}{2} c \Delta t + \Delta d_1 + \Delta d_2,$$

kde c je rychlost světla, Δd_1 a Δd_2 opravy z vlivu hustoty atmosféry a ze zpoždění měřicí aparatury. Původní přesnost asi 1,5 m stoupla v současnosti (r. 2005) asi na 2 až 1 cm. První laserová měření byla uskutečněna v USA ve 2. polovině 60. let 20. století. Zcela nahradila měření směrů, především pro podstatně vyšší přesnost a jednodušší zpracování. U nás v této době dosáhla světové úrovně hvězdárna v Hradci Králové.

**) Indexy je možno zaměnit.



Obr. 7.5.1

Případ 1. Rov. (7.5.2) nabízí tři nezávislé zprostředkující rovnice. Zavedeme

$$\begin{aligned} d &= d_0 + d d, \\ t^{gr} &= t_0^{gr} + d t^{gr}, \\ \delta &= \delta_0 + d \delta, \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

kde d_0 , t_0^{gr} , δ_0 jsou přibližné známé hodnoty a dd , dt^{gr} , $d\delta$ jejich hledané opravy, vztažené ke spojnici 12, obr. 7.5.1. Rov. (7.5.3) dosadíme do rov. (7.4.2) a ty pak do rov. (7.5.2), které linearizujeme. Po úpravě dostáváme

$$\mathbf{M}_d dd + d_0 \mathbf{M}_t (dt^{gr} \cos \delta_0) + d_0 \mathbf{M}_\delta d\delta + \mathbf{L} = \mathbf{v}, \quad (7.5.4)$$

kde vektory známých koeficientů zní

$$\mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_t = \frac{1}{\rho''} \begin{pmatrix} -\sin t_0^{gr} \\ -\cos c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_\delta = \frac{1}{\rho''} \begin{pmatrix} -\sin \delta_0 \cos t_0^{gr} \\ \sin \delta_0 \sin t_0^{gr} \\ \cos \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (7.5.5)$$

Vektory absolutních členů a oprav jsou

$$\mathbf{L} = d_0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} - d_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (7.5.6)$$

a mají rozměr délky.

Případ 2. Kromě neznámých d , t^{gr} , δ v rov. (7.5.3) je zde neznámou délka d_2 , která nebyla měřena. Systém rovnic (7.5.2) poskytne tedy jen dvě zprostředkující rovnice. Jejich linearizovaný tvar je

$$\mathbf{QM}_d dd + d_0 \mathbf{QM}_t (dt^{gr} \cos \delta_0) + d_0 \mathbf{QM}_\delta d\delta + \mathbf{L} = \mathbf{v}, \quad (7.5.7)$$

kde vektory \mathbf{M}_d , \mathbf{M}_t , \mathbf{M}_δ uvádějí rov. (7.5.5) a

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & b_2 \\ c_2 & 0 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{Q} \left[d_0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} - d_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \right].$$

Výpočet jejích prvků opět uskutečníme pomocí rov. (7.4.2). Podobně je možno zapsat rov. (7.5.7) při záměně stanovisek. Vektor oprav $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ má opět rozměr délky. V rov. (7.5.7) jsou jen dvě z uvedených tří rovnic na sobě nezávislé.

Případ 3. Kromě neznámých d , t^{gr} , δ rov. (7.5.3) jsou zde neznámými i směrové veličiny t_2^{gr} , δ_2 . Systém rov. (7.5.2) poskytne tedy jen jednu zprostředkující rovnici oprav. Její linearizovaný tvar je

$$\mathbf{R}\mathbf{M}_d dd + d_0 \mathbf{R}\mathbf{M}_t (dt^{gr} \cos \delta_0) + d_0 \mathbf{R}\mathbf{M}_\delta d\delta + \mathbf{L} = \mathbf{v}, \quad (7.5.8)$$

kde vektory \mathbf{M}_d , \mathbf{M}_t , \mathbf{M}_δ uvádějí rov. (7.5.5) a $\mathbf{R} = (a_2 \ b_2 \ c_2)$, $\mathbf{L} = d_{2_0} - d_2$. Směrové kosiny a_2 , b_2 , c_2 přísluší neměřeným směrovým veličinám, a proto je nutno je určit z výrazů

$$\begin{aligned} a_2 &= (d_1 a_1 - d_0 a_0) / d_2, \\ b_2 &= (d_1 b_1 - d_0 b_0) / d_2, \\ c_2 &= (d_1 c_1 - d_0 c_0) / d_2, \\ d_{2_0}^2 &= (d_1 a_1 - d_0 a_0)^2 + (d_1 b_1 - d_0 b_0)^2 + (d_1 c_1 - d_0 c_0)^2. \end{aligned}$$

Výpočet jednotlivých veličin opět uskutečníme pomocí rov. (7.4.2). Vektor oprav $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ má opět rozměr délky.

Případ 4. Respektuje klasickou metodu hvězdné triangulace a bylo o ní detailně pojednáno v kap. 7.4.

Tím jsou případy zobecnění Väisälä-ho metody vyčerpány.

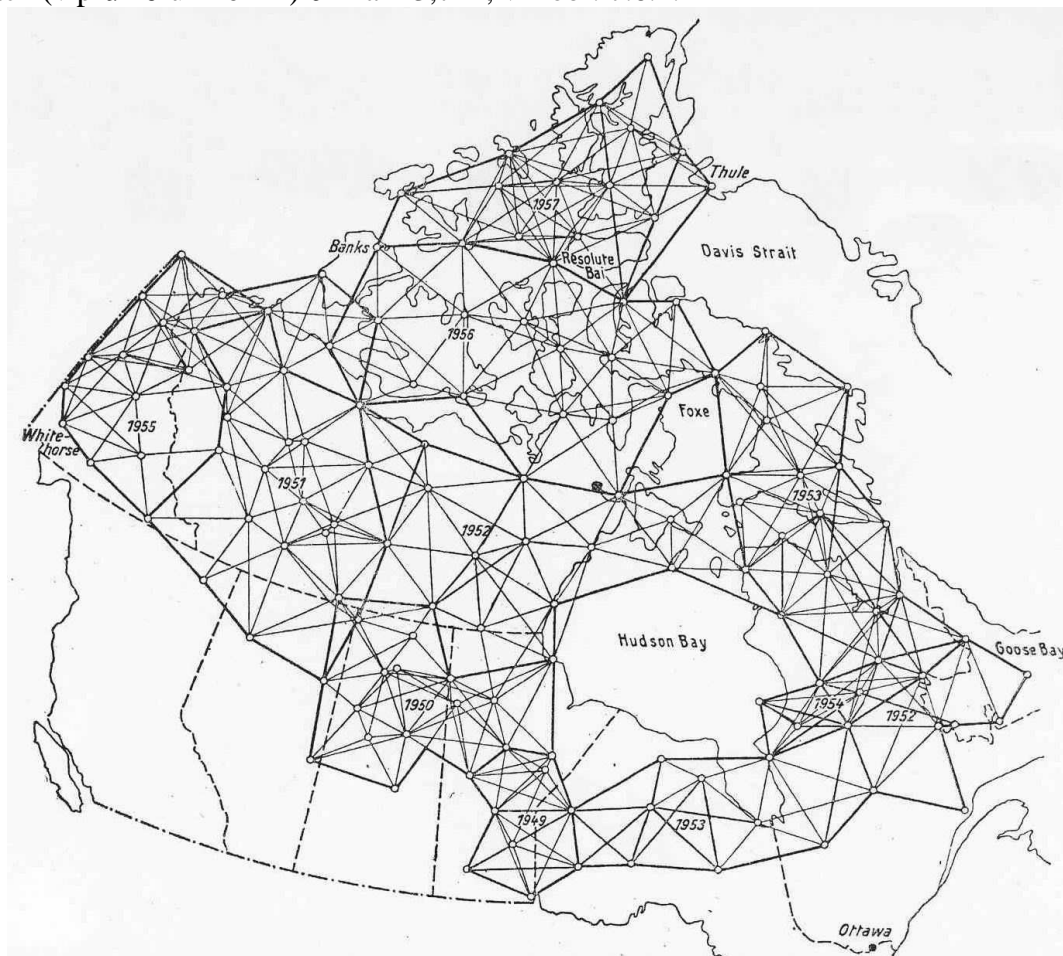
7.6 Měření na velké vzdálenosti před „družicovou érou“

Dříve, než přistoupíme k vlastnímu popisu měřických realizací v kap. 7.7, zmíníme se o měřických postupech, které předcházely „družicovou érou“. V práci [32] je stručná zmínka o propojení evropského a afrického pobřeží přes Gibraltarský průliv, jež bylo uskutečněno v osmdesátých letech předminulého století. Oba kontinenty zde byly propojeny obdélníkem o rozměrech asi 94 x 248 km, v němž byly trigonometricky zaměřeny směry stran i úhlopříček. Signalizace měla být původně prováděna pomocí heliotropů (odrážejících sluneční paprsky), ale po dobu třech měsíců se nepodařilo záblesky z druhého pobřeží zachytit. Bylo proto použito reflektorů a elektronických zdrojů, a to z obou dvou pobřeží.

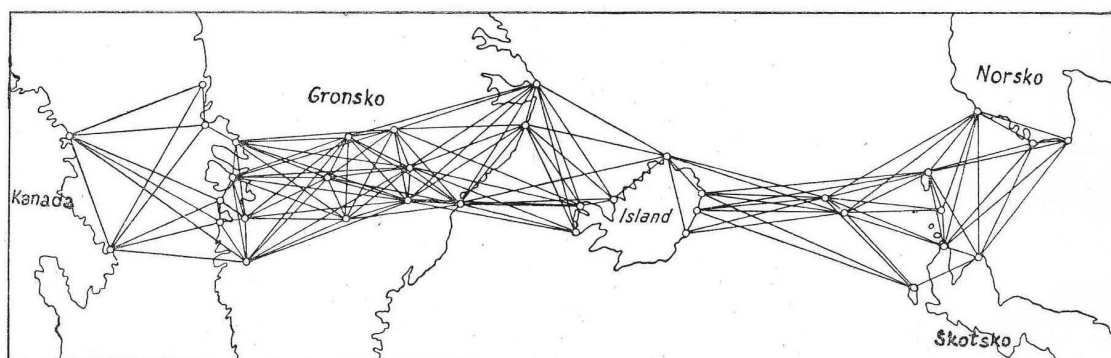
Velmi úplný popis takovýchto měřických realizací uvádí [42]. Vyjmete několik příkladů.

Pro spojení trigonometrických sítí Dánska a Norska v r. 1945 byly zaměřovány světelné signály, nesené letadlem a ovládané z letadla. Asi uprostřed vzdálenosti, která se měla měřicky zjistit, byly spuštěny záblesky, které byly měřiči soustavně sledovány. V daný okamžik, řízený obvykle z paluby letadla, se současně vyfotografovaly potřebné údaje, a to na všech zúčastněných stanicích. Teodolity fotograficky zaznamenávaly údaje kruhů, polohy libel atd.

Další systém SHORAN byl zkušebně použit v r. 1945 a dovoľoval pomocí letadel změřit vzdálenosti do několika set kilometrů. V letech 1949 – 1957 byla v Kanadě zaměřena tímto způsobem plošná síť zobrazená v obr. 7.6.1 s relativní chybou 1:56 000 v naměřených vzdálenostech. Systémem SHORAN byla v letech 1946 až 1957 zaměřena síť, spojující Floridu s Bahamskými ostrovy. Systému HIRAN bylo použito při spojení ostrovů Kréta a Rhodos s Lybií a Egyptem. V letech 1953 – 1956 byla propojena trigonometrická síť USA a Kanady přes Grónsko a Island s Norskem a Škotskem. Pravděpodobná chyba v měřených délkách (v průměru 440 km) činila $\pm 3,7$ m, viz obr. 7.6.2.



Obr. 7.6.1



Obr. 7.6.2

7.7 Triangulace na vysoké cíle – síť 0-tého řádu

Triangulace na vysoké cíle, jak napovídá sám nadpis této kapitoly, představuje jistou úpravu hvězdné triangulace užívané v geometrických metodách DG. Odlišnost pozůstává v tom, že namísto družice je použit balon nebo letadlo jako nositelé zábleskového zařízení.

7.7.1 Použití balónů k budování finské sítě 0-tého řádu

Prvně byla tato metoda prakticky aplikována pro vybudování sítě 0-tého řádu ve Finsku. Navázala tak na teorii rozpracovanou finským profesorem Y. Väisälä-m, viz [39], [21] a mnohé další, a zde podrobně uvedenou v kap. 7.3 a 7.4. Pro vynesení zábleskového zařízení do výšky asi 20 – 30 km použili finští geodeti speciálních balónů, viz obr. 7.7.1. Vzdálenost pozemních stanic byla asi 200 km. Z trojúhelníků této velikosti měla být po celém území Finska vybudována geodetická síť 0-tého řádu.

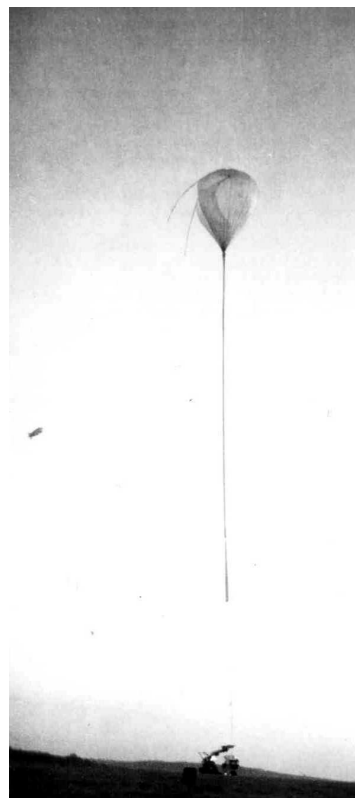
Přesnost v určení hodinového úhlu a deklinace spojnic pozemních stanic byla asi $\pm 1''$. Detailněji je popsáno v [39] a [21].

7.7.2 Přenos směru a délky pomocí letadla

V této kapitole bude popsána realizace měření na vysoké cíle, jejímž nositelem je letadlo. Nejde o nic jiného než o hvězdnou triangulaci, v níž je družice nahrazena záblesky z paluby letadla. Princip zůstává shodný. Poněkud odlišný je postup měření, výpočetní zpracování a organizace příprav. Sníží se přirozeně výška a tím i vzdálenost pozemních stanic. Je tedy postup s užitím letadla vhodný pro měření v rámci státu. Prvně byl použit v naší republice, viz [12] a [13].

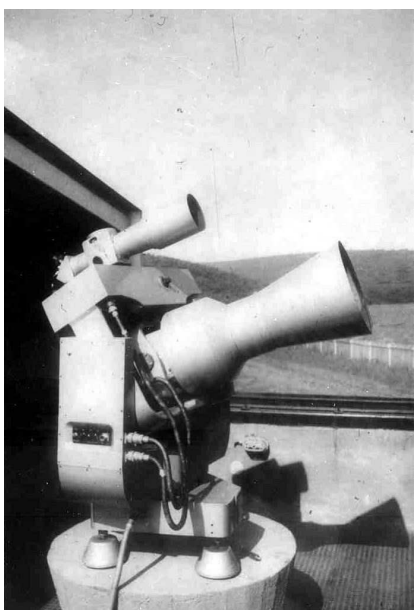
Použité přístroje

Na stanici 1, viz obr. 7.7.5, Hvězdárna a planetarium v Hradci Králové, bylo použito fotografické komory AFA 1000 ($f = 1000$ mm, $\varnothing = 140$ mm, zorné pole $14^\circ \times 14^\circ$) v azimutální montáži. Komora byla opatřena žaluziovou uzávěrkou, která byla ovládána a napojena na námořní chronometr Nardin. Otevření a uzavření uzávěrky trvalo vždy 1 s. Celý systém zaručoval přesnost lepší než 20 ms a posloužil jen pro registraci času přerušovaných stop drah hvězd. Na stanici 2, VTOPÚ v Dobrušce, bylo použito družicové komory AFU 75 ($f = 750$ mm, $\varnothing = 200$ mm, zorné pole $14^\circ \times 14^\circ$), a to v režimu sledujícím zdánlivý pohyb hvězd, viz obr. 7.7.2. Jako fotomateriálu bylo použito filmu Izopanchrom o citlivosti v červené barvě asi 33° DIN. Na stanici 1 byl dále umístěn pulsní rubínový laser, obr. 7.7.3, o vlnové délce 694,3 nm, výstupní energie 0,5 J, šíře pulsu 30 ns, disperzní úhel $2'$, kadence $1,2$ s⁻¹ a průměr reflektoru přijímače 440 mm. Přesnost každého měření byla lepší než 1,5 m. Na stanici 2 byl použit obdobný typ laser, leč větší optické a energetické mohutnosti, s kadencí $0,4$ s⁻¹ a přesností měření lepší než 0,4 m. Do příslušenství patří dále osciloskopy 70 MHz a 10 ns čítače.

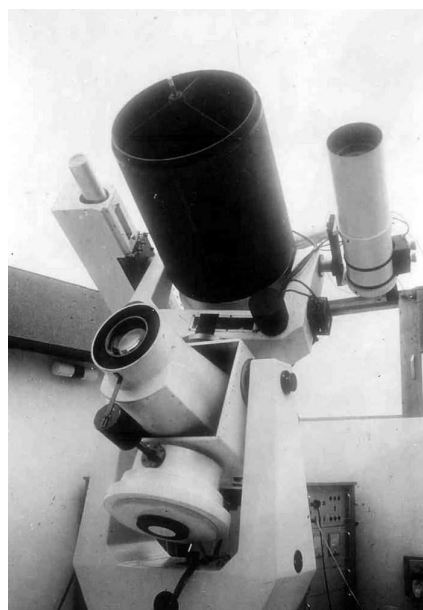


Obr. 7.7.1

Jako nosiče zábleskového zařízení a laserových odrážeců bylo použito cvičného letounu L 29 – Delfín, obr. 7.7.4, s možností výstupu až do výšky 10 km. Záblesky byly vytvářeny pomocí dvou xenonových výbojek X, umístěných na špičce letadla a spouštěných v intervalu 2 s. jejich přesnost byla větší než 1 ms. Nesynchronnost záblesků byla hluboce pod 0,1 ms. Celkový možný počet záblesků je asi 1000. Příjem a časová registrace světelných záblesků byly uskutečněny pomocí reflektorů a časových zařízení laserových aparatur. Dva laserové odrážecí L každý o ploše asi 400 cm², s disperzním úhlem po odrazu 1°, byly umístěny na vnějších stranách přídavných palivových nádrží pod křídly ve vzájemné vzdálenosti 4,4 m, obr. 7.7.4.



Obr. 7.7.2 Družicová komora AFU 75 na stanici 2



Obr. 7.7.3 Rubínový pulsní laser na stanici 1

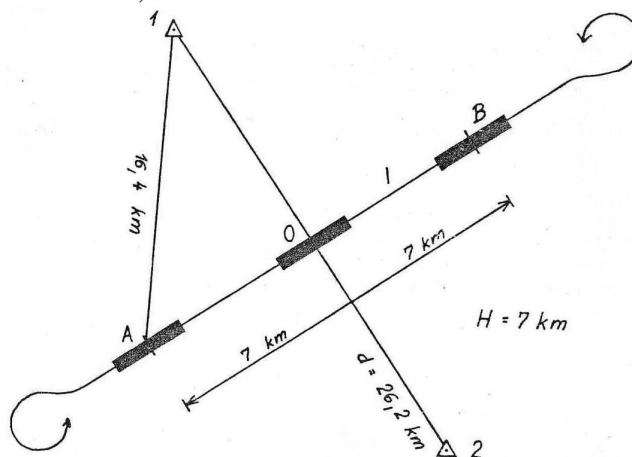


Obr. 7.7.4 Letadlo L-29 – Delfín: X – xenonové výbojky, L – laserové odrážecí

Popis realizace měření

K realizaci měření došlo v nocích z 23. na 24. a z 24. na 25. srpna 1976, obr. 7.7.6 ukazuje tuto situaci. Body 1 a 2, na nichž se nacházela vždy 1 fotografická komora a 1 laserová aparatura, jsou měřicí stanice. Přímkou 1 značí letovou čáru ve výši asi 7 km. Je optimální, aby byla kolmá na spojnici 12 a procházela jejím středem. Vyznačené úsečky bodů A a B značí úseky letové čáry, ve kterých byly prováděny fotografické expozice a snímány záblesky ze špičky letadla. Je optimální, aby $OA = OB =$ výška letu H .

Tato měření byla simultánní a použilo se jich pouze pro určení topocentrického směru stanice – záblesk. Naopak v okolí bodu O byla prováděna laserová měření vzdáleností. Některé odražené laserové paprsky byly exponovány týmiž fotografickými komorami. Tato měření byla kvazisimultánní. Výsledkem je délka, případně délka i směr stanice – laserový odražeč. V okolí bodů A a B bylo měřeno, jestliže se letadlo vzdalovalo od spojnice 12 a v okolí bodu O v obou směrech letu. Při jednom přeletu celou laserovou čarou 1 bylo uskutečněno měření (fotografické nebo laserové) jen v okolí jediného z uvedených bodů A, B, O. Při jednom vzletu letadla, který trval asi 50 až 60 minut, bylo uskutečněno 5 až 11 přeletů a v obou nocích celkem 5 vzletů, viz tab. 7.7.1.



Obr. 7.7.5 Situace měření 23. – 24. a 24. – 25. srpna 1976

Komora AFA 1000 při sledování záblesků i odražených laserových paprsků byla nejprve nastálo otevřena a teprve po výstupu letadla ze zorného pole komory zapnut režim uzávěrky pro registraci času přerušovaných stop drah hvězd. U komora AFU 75 bylo zorné pole stále otevřeno. Během přeletu nad body A a B bylo získáno na snímcích z každé stanice 1 a 2 až 25 obrazů záblesků. Na fotografickém materiálu se jeví jako ostře ohraničené kotouče o průměru až 100 μm . Během přeletů bodem O rovněž až 25 laserových obrazů, ovšem převážně ze stanice 2, neboť zde použité přístroje byly mohutnější a letová čára 1 (obr. 7.7.5) byla ke stanici 2 bližší. Ze stanice 1 byly expozice laserových obrazů velmi neúplné. Průměry obrazů činily 20 μm a 50 μm pro stanice 1 a 2. Zjišťování délek nepůsobilo žádné potíže. Pravidelná kadence záblesků i laserových pulsů byla uprostřed snímku přerušena, což dovolilo snadné vzájemné přiřazení obrazů z obou stanic, jakož i přiřazení časů. Všechny druhy časových registrací byly převedeny na čas TUC srovnáním s časovým signálem OMA 50.

Během obou nocí bylo získáno asi 500 délek, exponováno 300 obrazů odražených laserových paprsků a 150 obrazů záblesků. Je nutno uvést, že více než polovina měření (viz tab. 7.7.1) měla experimentální charakter.

Rozdíl azimutů mezi záměry ze stanice 1 byl asi 67° a ze stanice 2 asi 77° . Zenitové vzdálenosti byly v průměru 67° pro stanici 1 a 63° pro stanici 2. Výška letu se pohybovala od 6,3 km do 7,3 km. Průměrná rychlost letu byla 370 km/hod.

Tab. 7.7.1 Přehled měření

| Datum | Vzlet | Počet přeletů | Číslo snímku | Případ ^{*)} |
|-----------------|-------|---------------|--------------|----------------------|
| 23./24. 8. 1976 | 1 | 5 | 1 až 5 | 1 a 3 |
| | 2 | 11 | 6 až 16 | 1 a 3 |
| 24./25. 8. 1976 | 3 | 9 | 17 až 25 | 1 a 3 |
| | 4 | 7 | 26 až 32 | 1 a 3 |
| | 5 | 7 | 33 až 39 | 4 |

Výsledky

Společné vyrovnání všech 56 rovnic oprav (7.5.4), (7.5.8) a linearizované rovnice oprav (7.4.3) poskytlo výsledné hodnoty

$$d = 26\,134,85 \text{ m} \pm 0,33 \text{ m},$$

$$t^{gr} = -128^\circ 38'58,0'' \pm 1,09'',$$

$$\delta = 17^\circ 49'14,8'' \pm 1,06'',$$

kde střední jednotková chyba je $\pm 1,22$. Hodnoty korelačních koeficientů neznámých byly 0,18, - 0,05, - 0,21. Vyrovnáním pouze směrových veličin (případ 4, snímky 36 a 37) pomocí 28 rovnic oprav byly získány výsledné hodnoty

$$t^{gr} = -128^\circ 38'58,9'' \pm 0,57'',$$

$$\delta = 17^\circ 49'12,9'' \pm 0,57'',$$

kde střední jednotková chyba je $\pm 0,61''$. Vyrovnáním délkových a směrových veličin (příklad 1 a 3, snímky 09) pomocí 28 rovnic (7.5.4) a (7.5.8) byla získána výsledná hodnota délky

$$d = 26\,136,04 \text{ m} \pm 0,26 \text{ m},$$

kde střední jednotková chyba je $\pm 0,77$ m. Výsledné směrové veličiny spojnice 12 nemají v tomto posledním případě platnost, neboť synchronní roviny svírají příliš malé úhly.

Spojnice 12 tak byla určena směrem i délkou. Blíže v [9], [12], [13], [15], [23], [24], [39].

Uvedená metoda byla uskutečněna prakticky v ČR a byla rovněž použita v letectví a i vojenství. Posloužila i k obdobným projektům v tehdejší SRN, dále v Maďarsku a Rakousku. Obdobná triangulace na vysoké cíle je popsána v [23].

LITERATURA:

- [1] Arnold K.: Zur Bestimmung geodätischer Azimute aus Simultanbeobachtungen von Satelliten. Gerlands Beitr. zur Geoph., No. 6, 1965.

^{*)} Viz tab. 7.5.1.

- [2] Bugoslavskaja E. I.: Fotografičeskaja astrometrija. Moskva 1947.
- [3] Burša M.: Teorija opredelenija neparalelnostej maloj osi referenc-elipsoida, poljarnoj osi inercii Zemli ... Stud. geoph. et geod., 6 (1962), str. 209.
- [4] Burša M.: Základy kosmické geodézie (díl I: Kosmická geodézie geometrická). MNO, Praha 1967.
- [5] Currie J. P.: The Calibration of Ballistic Cameras and Their Use for the Triangulation of Satellite Position. Rés. géod. eur. obs. satel., Symp. de Paris, 1964.
- [6] Deekr H.: Die Anwendung der Photogrammetrie in der Satellitengeodäsie (Satellitenphotogrammetrie). Deut. geod. Kom. Bayer. Akad. Wissen., Reihe C, No. 111, München 1967.
- [7] Dobaczewska W., Baran W.: Vyrównanie eksperymentalnej środkowoeuropejskiej sieci triangulacji satelitarnej i analiza wyników wyrownania. Geod. i kart., 15, 1966, str. 4, Warszawa.
- [8] Groupe d'Etudes Spatiales: Chambres Ballistiques. Inst. Géogr. Nat., Paris 1964.
- [9] Hovorka F., Konrád M., Utěkal I.: Satellite ranging of Hradec Králové. 3rd Inter. Sympos. Geodesy and Physics of the Earth, Weimar 1976.
- [10] Jelínková, J.: Diplomní práce. Knihovna Observatoře astronomie a geofysiky, Praha 1968.
- [11] Kabeláč J., Kostecký, J.: Kosmická geodésie. Skriptum FAV ZČU, Plzeň 2005.
- [12] Kabeláč J.: Die Erweiterung und Realisation der Methode der Stellartriangulation. Wiss. Zeit. der TU Dresden, 1980.
- [13] Kabeláč J.: Projekt triangulace na vysoké cíle. Zpráva o řešení státního úkolu č. II-1-4/7. Praha, ČVUT 1980.
- [14] Kabeláč J.: Úvod do kosmické geodézie – II. díl. Ediční středisko ČVUT, Praha 1991.
- [15] Kakkuri J.: Stellar triangulation with balloon-borne beacons. Veröff. des Finn. Geod. Inst., No. 76, Helsinki 1973.
- [16] Karský G., Synek I.: Metodika použití komor Rb 75. Výzkumná práce VÚGTK, Praha 1969.
- [17] Kiselev A. A., Firago B. B., Ščegolev G. E.: Instrukcija po opredeleniju koordinat ISZ ... Bjul. stan. opt. nabl. ISZ, No. 3, Moskva 1960.
- [18] Klenickij B. H., Ustinov, G. A.: Uravňovanie prostranstvennoj kosmičeskoj trianguljácii v sisteme prjamougolnych geocentričeskich koordinat. Geod. i kart., No. 5, 1964, str. 3, Moskva.
- [19] Klenickij B. M., Ustinov, G.A.: Vyčislenie ekvatorialnych topocentričeskich koordinat ISZ. Bjul. stan. opt. nabl. ISZ, No. 39, Moskva 1964.
- [20] Krátký V., Fixel J.: Rozbor metod sledování UZD pro geodeticko-astronomické účely. Výzkumná zpráva VAAZ, Brno 1966.
- [21] Kukkamäki T. J.: Stellar Triangulation. Bull. Géodésique, No. 54, 1959, str. 53.
- [22] Lambeck K.: A Spatial Triangulation Solution for a Global Network and the Position of the North American Datum within it. Ann. Meet. of the Amer. Geoph. Union, Washington, April 1969.
- [23] Marek K. H., Rehse H.: A technology of stellar triangulation by means of balloon-borne beacons. 3rd Inter. Sympos. Geodesy and Physics of the Earth, Weimar 1976.
- [24] Maršík Z.: Transformation of Plate Co-ordinates to Equatorial Co-ordinates. Stud. geoph. et geod., 12 (1968), 2.
- [25] Merritt E. L.: Analytical Photogrammetry. Pitman Publ. Corp., New York 1958.

- [26] Michajlov A. A., Dejč A. N., Krat B. A. i dr.: Kurs astrofiziki a zvezdnoj astronomii. Tom 1, str. 183. Moskva-Leningrad 1951.
- [27] Mueller J. J.: Introduction to Satellite Geodesy. New York, 1964.
- [28] Nabljudeniya ISZ. No. 3, str. 150, Berlin 1965; No. 6, str. 28, Moskva 1967; No. 7, str. 195, Sofija 1968.
- [29] Pachelski W.: The Method for Adjustment of a Satellite Triangulation Network by Means of the Filtering Equations. COSPAR, Praha 1969.
- [30] Rajchl R.: Photographische Beobachtung künstlicher Erdsatelliten ohne Hilfe registrierender Zeiteinrichtungen. Bull. Astr. Inst. Czecho., No. 6, 20 (1969), str. 331.
- [31] Rezultaty sinchronnykh nabljudenij – vesna 1965.
- [32] Ryšavý J.: Vyšší geodézie. Nakladatelství ČMT, Praha 1947.
- [33] Skořepová J., Kabeláč J.: Vyrovnání prostorové družicové sítě. Geod. a kart. obzor, č. 7, Praha 1971.
- [34] Spisok ekvatorialnych koordinat sputnika „Pageos“ ..., oseň 1966.
- [35] Spisok ekvatorialnych koordinat sputnikov Echo – I a Echo – II ..., 1964.
- [36] Standard Earth. Vol. 1 and 2. Smith. Astro. Obs., Spec. Rep. 200 and 201, 1966. Edited by C. A. Lundquist and G. Veis.
- [37] Tablica značenij topocentričeskich ekvatorialnych koordinat položenij ISZ „Echo – I“, 1962 a 1963.
- [38] Turner H. H.: How to Obtain a Star's Right Ascension and Declination from a Photograph. The Observatory, Vol. 16, 1893.
- [39] Väisälä Y., Oterma L.: Anwendung der astronomischen Triangulationsmethode. Veröff. fin. geod. Inst., No. 53, Helsinki 1960.
- [40] Veis G.: The Determination of Absolute Directions in Space with Artificial Satellites. Smith. Astro. Obs., Spec. Rep. No. 133, 1963.
- [41] Vondrák J.: Výpočet azimutu spojnice družicových stanic z quasisimultánních snímků UDZ. Výzkumná zpráva VÚGTK, Praha 1969.
- [42] Vykuřil J.: Vyšší geodézie. Vydavatelství Kartografie, Praha 1982.
- [43] Žongolovič J. D.: Projekt edinoj mirovoj kosmičeskoj trianguljacii. Stud. geoph. et geod., 9 (1965), str. 185.
- [44] Žongolovič J. D.: Sputniki Zemli i geodetika, Astr. žurnal, No. 1, Tom XLI (1964), str. 156.

