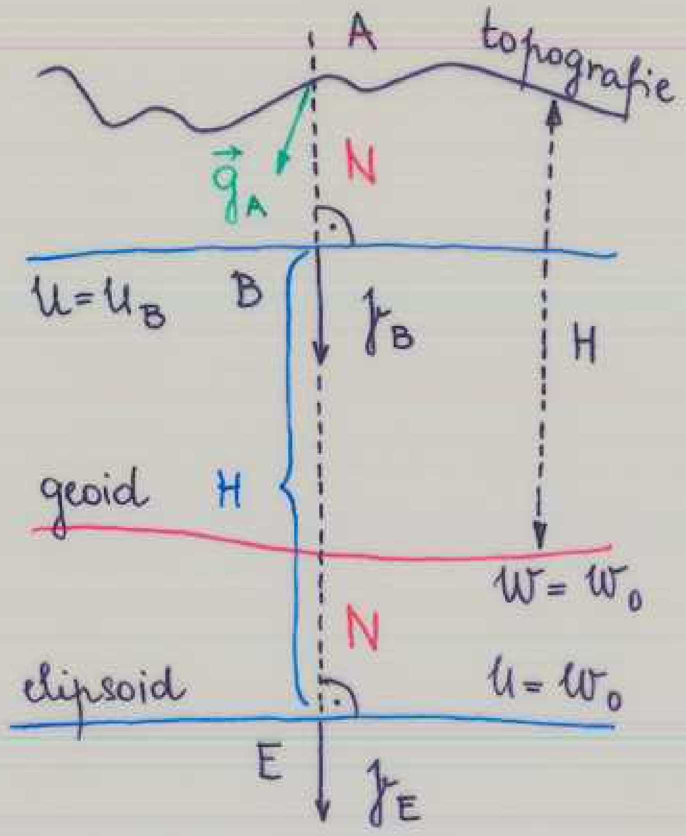
ZÁKLADNÍ GRAVIMETRICKÁ ROVNICE (Stokes)

- vztah mezi g a T před příchodem GPS



$\mathcal{H}$ - nivelace

tíhová porucha: $g_A - \gamma_A \doteq - \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_A$

$$\gamma_A - \gamma_B \doteq \left.\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right|_B N = \left.\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right|_B \frac{T_A}{\gamma_B}$$

$$\gamma_B \doteq \gamma_E + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right|_E H$$

tíhová anomálie:

$$g_A - \gamma_B = - \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_B + \left.\frac{\partial \gamma}{\partial n}\right|_B \frac{T_A}{\gamma_B}$$

sférická aproximace:

$$g_A - \gamma_B \doteq - \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_A - \frac{2}{r_B} T_A$$

FORMULACE ÚLOH S HRANIČNÍ PODMÍNKOU

- základní gravimetrická rovnice = diferenciální rovnice pro transformaci $g \rightarrow T$
- pro řešení nutno dodat další podmínky:

$\nabla^2 T = 0$ ... T je harmonická funkce vně geoidu

$\lim T = 0$ ... T je regulární v nekonečnu

$$\Delta g_B = -\frac{2}{r_B} T_B - \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_B \qquad \qquad \delta g_B = -\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_B$$

- třetí (Robinova) úloha
- stále velmi častá v geodézii

tzv. Stokesův problém

- druhá (Neumannova) úloha
- nabývá na významu

tzv. Hotinův problém

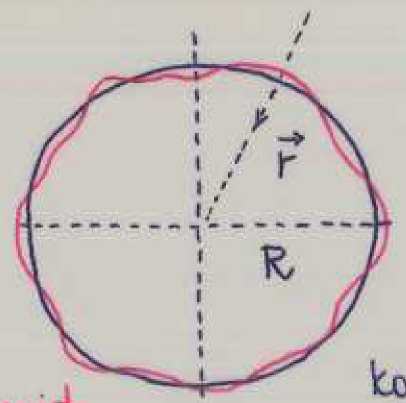
ŘEŠENÍ STOKESOVY ÚLOHY

- formulace úlohy (sférická aproximace)

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{... T je harmonické vně koule}$$

$$\Delta g = -\frac{2}{R} T - \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{... hraniční podmínka}$$

$$\lim T = 0 \quad \text{... regularita}$$



- řešení pomocí Greenova integrálu:

$$\boxed{T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\varepsilon} \Delta g \, S(\psi) \, d\varepsilon'}$$

Stokesův integrál

$S(\psi)$ ... sférická Stokesova funkce (Stokes 1849)

ψ ... sférická vzdálenost výpočetní - integrační bod

ŘEŠENÍ HOTINOVY ÚLOHY

- formulace úlohy (sférická aproximace):

$$\nabla^2 T = 0 \quad \ldots \text{ T je harmonické vně koule}$$

$$\delta g = - \frac{\partial T}{\partial r} \quad \ldots \text{ hraniční podmínka}$$

$$\lim T = 0 \quad \ldots \text{ regularita}$$

- řešení pomocí Greenova integrálu:

$$\boxed{T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\varepsilon} \delta g \, \mathcal{H}(\psi) \, d\varepsilon'}$$

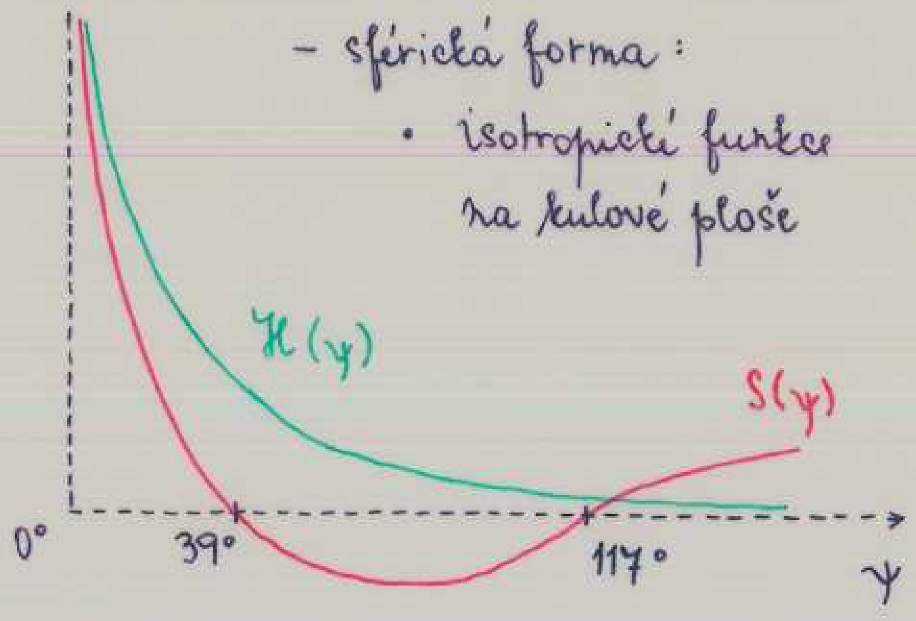
Hotinův integrál

$\mathcal{H}(\psi)$ … Hotinova sférická funkce (Hotine 1969)

- pokud jsou splněny všechny podmínky, řešení Hotinovy (i Stokesovy) úlohy existuje, je jednoznačné a stabilní

GREENOVY FUNKCE TYPU STOKES A HOTINE

- sférická forma:
  - isotropické funkce na kulové ploše



- obě funkce jsou singulární:

$$\lim_{\psi \to 0} S(\psi) = \lim_{\psi \to 0} \mathcal{H}(\psi) = +\infty$$

- spektrální forma:

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)$$

$$\mathcal{H}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos\psi)$$

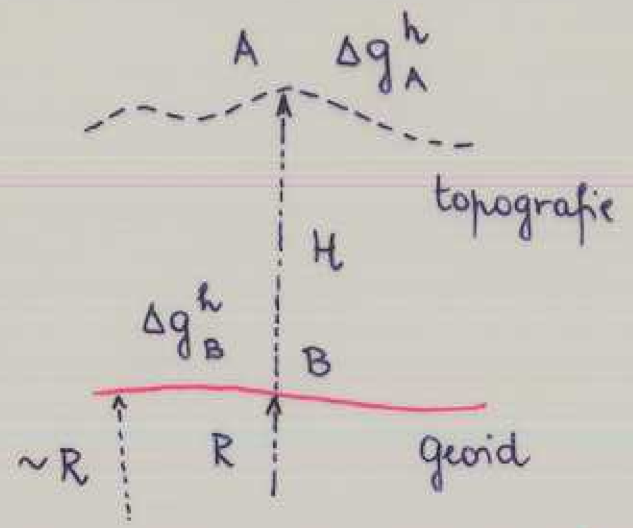
- prostorový tvar:

$$S(\psi) = 1 + \csc\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\mathcal{H}(\psi) = \csc\frac{\psi}{2} - \ln\left(1 + \csc\frac{\psi}{2}\right)$$

- singularita je řešitelná v obou případech

HARMONICKÉ PRODLUŽOVÁNÍ TÍHOVÝCH DAT



- problém : tíhová data na topografii, ale žádaná na geoidu
- řešení : harmonické prodlužování

$$\nabla^2 [r \Delta g^h] = 0 \quad \ldots \text{ vně geoidu}$$

$$\Delta g_B^h = f \quad \ldots \text{ hraniční podmínka}$$

$$\lim \Delta g^h = 0 \quad \ldots \text{ regularita}$$

$$\Delta g_A^h = \Delta g_B^h + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Delta g^h}{\partial r} \Big|_B$$

= Dirichletova úloha

- problémy s konvergencí !

- řešení pomocí Greenova integrálu :

$$\Delta g_A^h = \frac{r_A}{4\pi R} \oiint_{\varepsilon} \Delta g_B^h \, P(R, \psi, r_A) \, d\varepsilon'$$

- nutno řešit inverzi (nestabilní Fredholmův integrál)

ŘEŠENÍ GEOIDU POMOCÍ JEDINÉ INTEGRÁLNÍ ROVNICE

- Stokesův (či Hotinův) a Abel-Poissonův integrál lze kombinovat

$$\nabla^2 T^h = 0 \quad \ldots \text{ vně geoidu}$$

$$\Delta g^h_A = -\frac{2}{r_A} T^h_A - \left.\frac{\partial T^h}{\partial r}\right|_A \quad \ldots \text{ na topografii}$$

$$\lim T^h = 0 \quad \text{v nekonečnu} \qquad T^h_B = ?$$

- řešení:

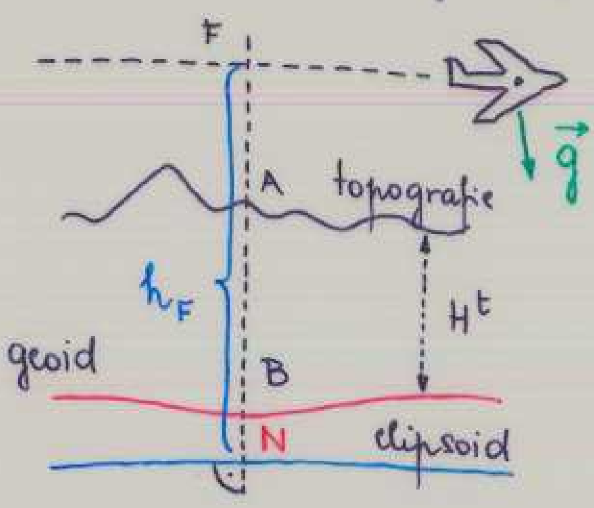
$$\Delta g^h_A = \frac{1}{4\pi R} \oiint_{\mathcal{E}} T^h_B \, K(R, \psi, r_A) \, d\mathcal{E}'$$

- integrační jádro K má vlastnosti funkce S a funkce P
- rovnice je opět Fredholmova integrální rovnice (stabilní):

vektorově $\Delta g^h_A = \mathbb{T}^h_B \mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{T}^h_B = \mathbb{K}^{-1} \Delta g^h_A$

ŘEŠENÍ GEOIDU Z LETECKÝCH DAT

- letecká data jsou specifická : rychlé a homogení pokrytí, nákladné
vysoký měřický šum – filtrování dat

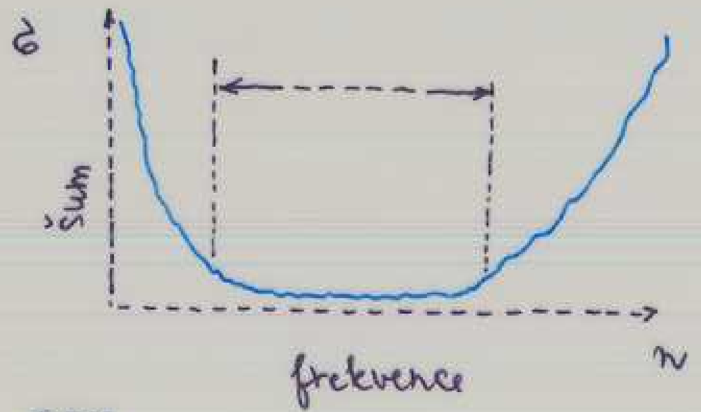


- všechny data mají GPS souřadnice

=> Hotinova úloha

- gravimetrická redukce (snažší)
- řešení (jeden integrál) :

$$T^b = \frac{r_F}{4\pi} \iint_\varepsilon \delta g_F^b \, \mathcal{T}^b(R, \psi, r_F) \, d\varepsilon'$$



=> řešení je frekvenčně omezeno

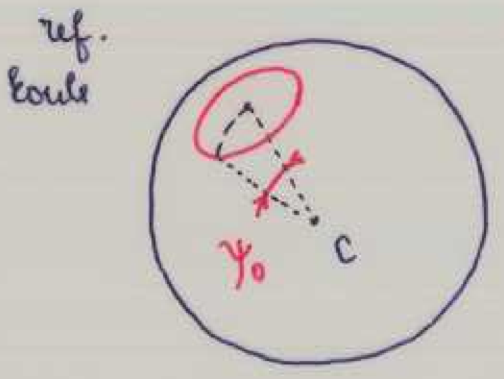
- zvláštnost : funkce $\mathcal{T}^b$ nemá prostorový tvar, řada nekonverguje !

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ GREENOVÝCH INTEGRÁLŮ 1.

- dnes běžně užívané dvě metody : prostorová integrace (klasika)
  spektrální metody

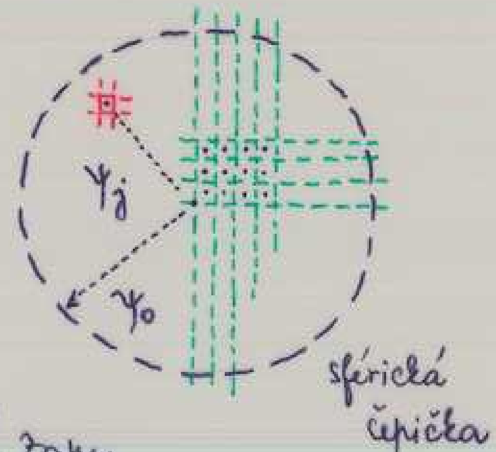
a) Prostorová integrace (kvadratura) :

- numerická integrace přes střední hodnoty uvnitř integrační oblasti



$$\boxed{T \doteq \frac{R}{4\pi} \sum_{j}^{N} \overline{\Delta g}_j \, S(\psi_j) \, \Delta\varepsilon_j}$$

$\overline{\Delta g}_j$ ... střední hodnota funkce Δg v oblasti $\Delta\varepsilon_j$

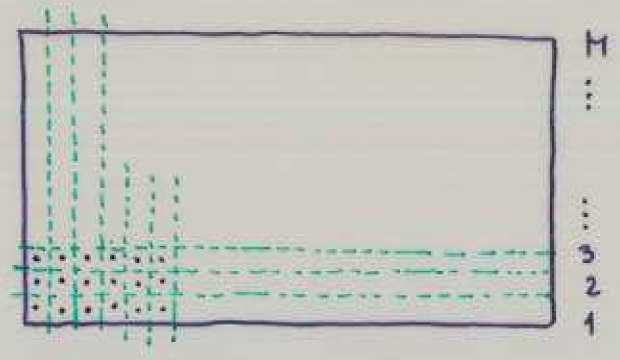


- výhody : snadná formula, jednoduché vzdálené zony
- přesnost záleží na volbě parametrů ψ_0 a $\Delta\varepsilon$
  - numerická náročnost

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ GREENOVÝCH INTEGRÁLŮ 2.

b) spektrální metody (od 70 let 20 st. v geodézii)

- založeny na konvolučním teorému
- snaha o rychlejším výpočtu 2-D integrálu



$$\boxed{T = \frac{R\Delta\varepsilon}{4\pi} F^{-1}\left\{ \sum_{k}^{M} F(\Delta g_k \cos\phi_k) F(S) \right\}}$$

F ... spektrální operátor (Fourier)

F^{-1} ... inverze F

- výhody : rychlý výpočet
- komplikovaná počítačová realizace, vzdálené zóny
- data musí splňovat požadavek pro aplikaci FFT (FHT)
  - dnes poměrně rozšířený postup