Základy metodologie v geodézii

doc. Ing. Pavel Novák, PhD.

Fakulta aplikovaných věd

Západočeská univerzita v Plzni

ZÁKLADY METODOLOGIE V GEODÉZII (ZMG)

Doc. Ing. Pavel Novák, PhD. **email: pnovak@pecny.asu.cas.cz**

1 Probírané témata

- úvod do předmětu – definice a terminologie;
- matematický model: deterministická a stochastická část;
- klasifikace matematických modelů;
- vyrovnání přeurčeného modelu (MNČ);
- úvod do statistického testování;
- testy měřených hodnot na konsistenci a hrubé chyby;
- testy měřených hodnot v kontextu matematického modelu;
- testování řešených parametrů;
- plánování měření pro dosažení požadované přesnosti;
- úlohy s apriorní znalostí o řešených parametrech;
- úlohy s úlohami a singularitami;
- a další ...

2 Literatura

Böhm J, Radouch V, Hampacher M (1990). Vyrovnávací počet. SNTL Praha.

Hampacher M, Radouch V (2000). Teorie chyb a vyrovnávací počet. ČVUT Praha.

Mikhail EM (1976). Observations and least squares. University Press of America, New York.

Vaníček P, Krakiwsky E (1980). Geodesy the Concepts. Elsevier, Amsterdam.

GEODETICKÁ METODOLOGIE

- souhrn postupů umožňující určování parametrů popisující geometrii, pohyb (rotaci) a tíhové pole Země
- popis ve smyslu statickém a stále častěji i kinematickém
- základní kroky geodetické metodologie :
  1. určení druhu, množství a přesnosti měřených dat
  2. kontrola a předzpracování dat
  3. určování neznámých parametrů (vyrovnání)
  4. odhad přesnosti určených parametrů
- velmi důležitý nástroj v geodézii :

neznámé parametry většinou neměřitelné => nepřímé postupy

STAVEBNÍ KAMENY GEODETICKÉ METODOLOGIE

a) identifikace neznámých parametrů a jejich požadované přesnosti

b) formulace matematického modelu a měřených hodnot

c) specifikace přesnosti měření k naplnění požadavku ad a)

d) provedení měřického experimentu a kontrola dat

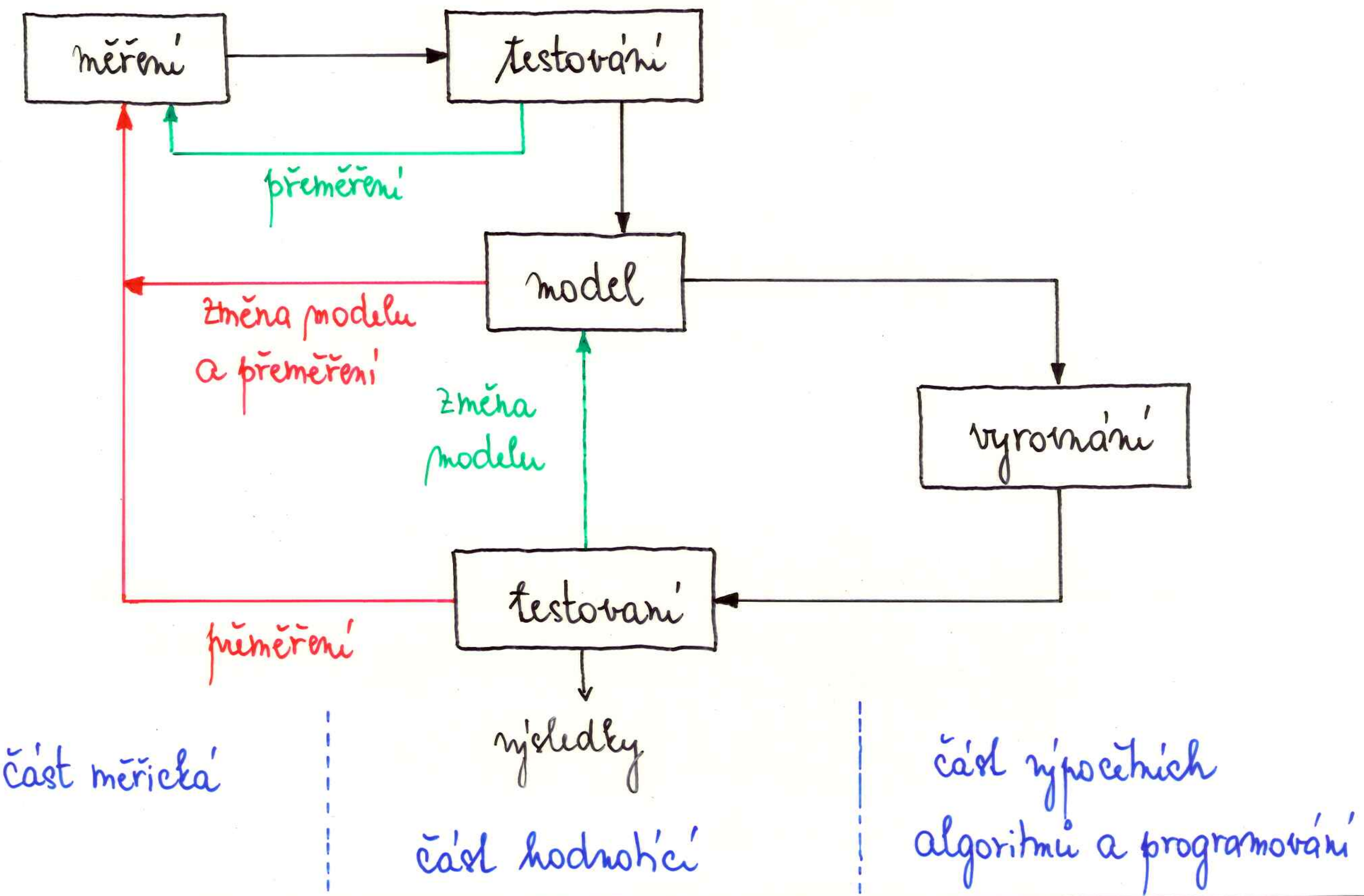
e) řešení matematického modelu (algoritmy, programy)

f) kontrola správnosti a kompletnosti matematického modelu,
současná kontrola modelu a měření

g) ověření určených parametrů a jejich porovnání
s nezávislými určeními (existují-li)

- v literatuře: různé definice (slučování / dělení kroků)

STRUČNÉ SCHÉMA GEODETICKÉ METODOLOGIE



MATEMATICKÝ MODEL

- obecné vztah mezi měřenými, známými (konstantními) a určovanými parametry
- v geodézii se jedná o matematické modely založené na poměrně jednoduchých matematických a fyzikálních zákonech
- většina modelů je nelineárních
  ⇒ složitější postupy při jejich řešení
- každý matematický model má dvě části:
  a) funkcionální (deterministický) model
  b) stochastický model
- nutno uvažovat oba modely současně!

FUNKCIONÁLNÍ SLOŽKA MATEMATICKÉHO MODELU

- popisuje určitelné (deterministické) vlastnosti problému
- geodézie : matematické a fyzikální zákony
- často ne explicitně definované, mnohdy více možností
- obecně by model měl odpovídat fyzikální realitě
  s přesností odpovídající zamýšlenému účelu
- měření je výsledkem fyzikálního experimentu
  - => zapojení měřených hodnot do matematického modelu
    vyžaduje jeho rozšíření
- rozšíření = zohlednění vlastností měření – stochastická část

STOCHASTICKÁ ČÁST MATEMATICKÉHO MODELU

- základní vlastnost měření : stochastické variace vlivem rušivých jevů během měření, měřických chyb, náhodnosti experimentu atd.
- ověření stochastických vlastností měření je velmi složité : velmi mnoho opakovaných měření – zobecnění statistických chyb
- v praxi : hrubá aproximace statistických vlastností měření
  např. nezávislost, stejná přesnost
- předpoklady statistických vlastností všech parametrů se nazývá stochastický model
- pomocí něho se v matematickém modelu rozlišují parametry
  (známé / konstantní vs. neznámé / určované)

PŘÍKLADY DESIGNACE PARAMETRŮ V MODELU

1) refrakční koeficient při trigonometrickém určování výšek :
   - může být považován za konstantu , určovaný parametr během vyrovnání nebo stochastickou veličinu s předem definovanou směrodatnou odchylkou

2) vložení polynomu do množiny diskrétních hodnot :
   - jeden nebo i více koeficientů určovaného polynomu mohou být uvažovány jako měření se směrodatnou odchylkou a nulovou střední hodnotou

OBECNÁ FORMULACE MATEMATICKÉHO MODELU

- matematický vztah mezi určitými parametry daný jistými zákony

  obecné $\underline{f}(\underline{q}) = \underline{o}$ ... rozměr $(m \times 1)$

  kde vektor $\underline{f} = [\, f_1 \;\; f_2 \;\; \dots \;\; f_m \,]^T$

  parametry $\underline{q} = [\, q_1 \;\; q_2 \;\; \dots \;\; q_k \,]^T$

- některé parametry ve vektoru $\underline{q}$ jsou známé (vektor $\underline{c}$), některé měřené (vektor $\underline{\ell}$) a některé neznámé (vektor $\underline{x}$)

  čili

$$\boxed{\underline{f}(\underline{q}) = \underline{f}(\underline{c}, \underline{\ell}, \underline{x}) = \underline{o}}$$

- rozměry $\underline{\ell}$ $(n \times 1)$, $\underline{x}$ $(u \times 1)$, $\underline{f}$ $(m \times 1)$

KLASIFIKACE MATEMATICKÝCH MODELŮ

- vektor $\underline{c}$ ... součást modelu => $\underline{f}(\underline{x}, \underline{\ell}) = \underline{0}$

a) **model implicitní** $\underline{f}(\underline{x}, \underline{\ell}) = \underline{0}$

  - někdy doplněn o podmínku $\underline{h}(\underline{x}) = \underline{0}$

b) **model explicitní v $\underline{x}$** $\underline{g}(\underline{\ell}) = \underline{x}$

  - explicitní funkce $\underline{g} = [g_1\ g_2\ \dots\ g_m]^T$
  - speciální případ : $\underline{g}(\underline{\ell}) = \underline{0}$, $\underline{\ell} = \underline{x}$

c) **model explicitní v $\underline{\ell}$** $\underline{h}(\underline{x}) = \underline{\ell}$

- pro řešení je nutno / vhodné převést na lineární tvar

PŘÍKLAD IMPLICITNÍHO MODELU

- jednoduchý příklad pro $m = n = u = 2$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, l_1, l_2) \\ f_2(x_1, x_2, l_1, l_2) \end{bmatrix}}_{\underline{f}(\underline{x}, \underline{l})} = \begin{bmatrix} l_1^2 \sin^2 x_1 + \sqrt{l_1 x_1} \\ l_1 \exp x_2 + l_2 x_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{o}}$$

- přechod na lineární tvar - linearizace :

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) \doteq \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{l}_0) + \underbrace{\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \Bigg|_{\substack{\underline{x} = \underline{x}_0 \\ \underline{l} = \underline{l}_0}}}_{\underline{A}} \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\underline{\delta}} + \underbrace{\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{l}} \Bigg|_{\substack{\underline{x} = \underline{x}_0 \\ \underline{l} = \underline{l}_0}}}_{\underline{B}} \underbrace{(\underline{l} - \underline{l}_0)}_{\underline{r}}$$

PŘÍKLAD MODELU EXPLICITNÍHO V $\underline{\ell}$

- určování polohy v 3D pomocí GPS :

$$\underline{\ell} = [\,\rho_1 \;\; \rho_2 \;\; \rho_3 \;\; \rho_4\,]^T \qquad \underline{x} = [\,x_p \;\; y_p \;\; z_p\,]^T$$

- observační rovnice ve tvaru

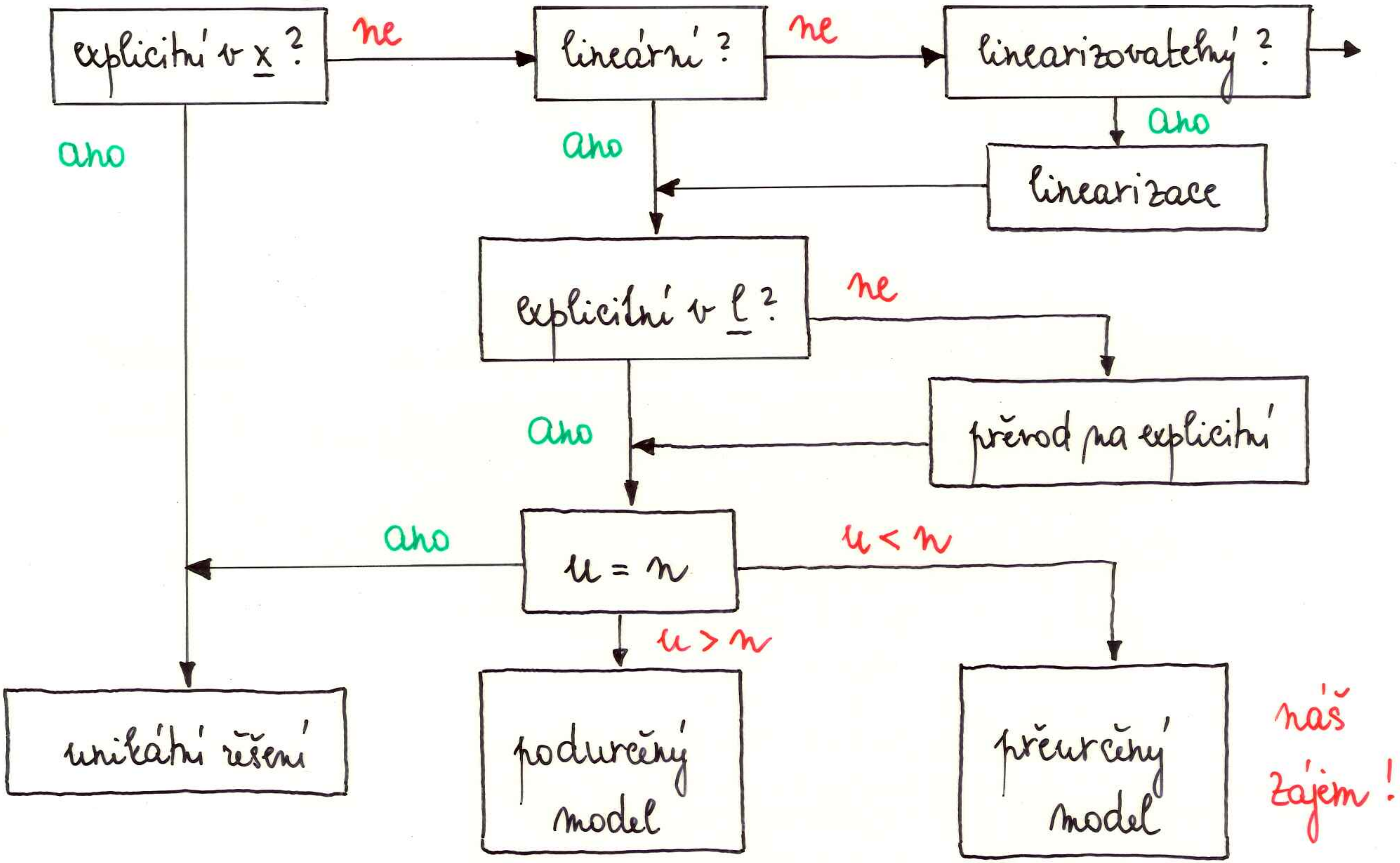
$$\rho_i = \left[\,(x^i - x_p)^2 + (y^i - y_p)^2 + (z^i - z_p)^2\,\right]^{1/2}, \quad i = 1,2,3,4$$

- kde $[\,x^i \;\; y^i \;\; z^i\,]^T$ ... vektor polohy i-té družice

- v obecném tvaru $\underline{\ell} = \underline{f}(\underline{x})$ a

$$\underline{\ell} \doteq \underbrace{\underline{f}(\underline{x}_0)}_{\underline{w}} + \underbrace{\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\underline{x}_0}}_{\underline{A}} \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{\underline{\delta}} \longrightarrow \underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w} = \underline{v}$$

OBECNÝ POSTUP PŘI ŘEŠENÍ MATEMATICKÉHO MODELU



LINEARIZACE MATEMATICKÉHO MODELU

- implicitní model :

$$\underline{f}(\underline{x},\underline{\ell}) \doteq \underline{f}(\underline{x}_0,\underline{\ell}_0) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{x}_0\\ \underline{\ell}=\underline{\ell}_0}} (\underline{x}-\underline{x}_0) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{\ell}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{x}_0\\ \underline{\ell}=\underline{\ell}_0}} (\underline{\ell}-\underline{\ell}_0) = \underline{0}$$

- Taylorova řada s body expanze $\underline{x}_0$ a $\underline{\ell}_0$
- Jakobiány $\underline{A} = \left.\dfrac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{x}_0\\ \underline{\ell}=\underline{\ell}_0}}$ $\underline{B} = \left.\dfrac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{\ell}}\right|_{\substack{\underline{x}=\underline{x}_0\\ \underline{\ell}=\underline{\ell}_0}}$
- řešení platí pouze v blízkosti $\underline{x}_0$ a $\underline{\ell}_0$ => nutné iterovat
- co se stane, linearizujeme-li již lineární model ?
- je každý matematický model linearizovatelný ? – předpoklady ?

LINEÁRNÍ FORMY MATEMATICKÝCH MODELŮ

a) implicitní model :

$$\underline{f}(\underline{x},\underline{\ell}) \doteq \underline{f}(\underline{x}_0,\underline{\ell}_0) + \underline{A}(\underline{x}-\underline{x}_0) + \underline{B}(\underline{\ell}-\underline{\ell}_0) = \underline{o}$$

nebo-li $\underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{\ell} + \underline{w} = \underline{o}$, $\underline{w} = \underline{f}(\underline{x}_0,\underline{\ell}_0) - \underline{A}\,\underline{x}_0 - \underline{B}\,\underline{\ell}_0$

b) explicitní model v $\underline{x}$:

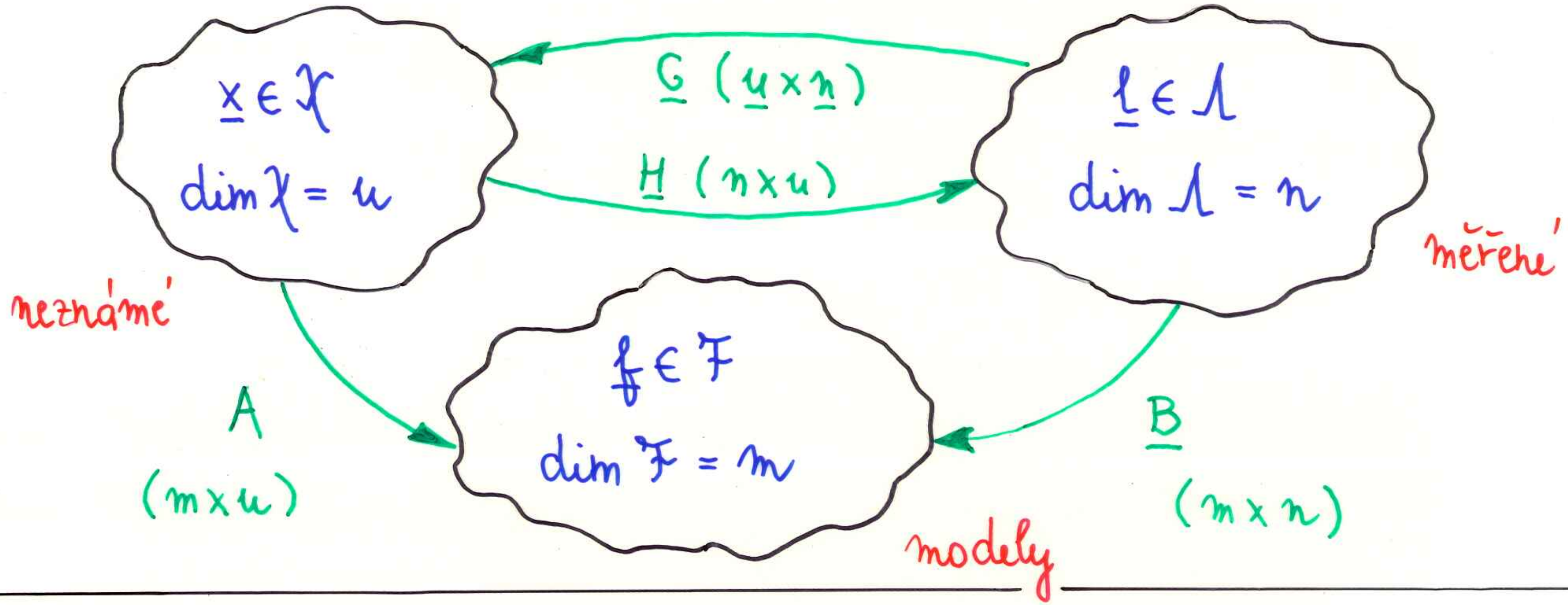
$$\underline{x} = \underline{G}\,\underline{\ell} + \underline{w} \quad , \quad \underline{G} = \left.\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\ell}}\right|_{\underline{\ell}=\underline{\ell}_0} \quad , \quad \underline{w} = \underline{g}(\underline{\ell}_0) - \underline{G}\,\underline{\ell}_0$$

c) explicitní model v $\underline{\ell}$:

$$\underline{\ell} = \underline{H}\,\underline{x} + \underline{w} \quad , \quad \underline{H} = \left.\frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x}=\underline{x}_0} \quad , \quad \underline{w} = \underline{h}(\underline{x}_0) - \underline{H}\,\underline{x}_0$$

VYUŽITÍ KONCEPTU MATEMATICKÝCH PROSTORŮ

- části matematického modelu lze chápat jako elementy prostorů :
  - neznámé parametry - vektor $\underline{x}$: prostor $\mathcal{X}$ ($\dim \mathcal{X} = u$)
  - měřené parametry - vektor $\underline{l}$: prostor Λ ($\dim \Lambda = n$)
  - matematické modely - vektor $\underline{f}$: prostor $\mathcal{F}$ ($\dim \mathcal{F} = m$)



KONVERZE IMPLICITNÍHO MODELU NA EXPLICITNÍ

- implicitní model má linearizovaný tvar

$$\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{r} + \underline{w} = \underline{0}$$

- můžeme zavést substituci - vektor $\underline{r}' = -\underline{B}\,\underline{r}$:

$$\underline{A}\,\underline{\delta} - \underline{r}' + \underline{w} = \underline{0}$$

$$\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w} = \underline{r}'$$

- porovnej s modelem explicitním v $\underline{l}$: $\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w} = \underline{l}$
- řeší se za podmínky $\min(\underline{r}'^T \underline{C}_{r'}^{-1} \underline{r}')$, $\underline{C}_{r'} = \underline{B}\,\underline{C}_r\,\underline{B}^T$
- normální rovnice $(\underline{A}^T \underline{C}_{r'}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_{r'}^{-1} \underline{w}$
- komplikace ? převod $\underline{r}'$ na $\underline{r}$ - $\underline{r} = -\underline{B}^{-1}\underline{r}'$

VZTAH MEZI MODELEM IMPLICITNÍM A EXPLICITNÍM V $\underline{l}$

- model implicitní $\underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) = \underline{o}$: $\underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{l} + \underline{w} = \underline{o}$

  explicitní $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{l}$: $\underline{H}\,\underline{x} + \underline{w} = \underline{o}$

• porovnej $\underline{A} = \dfrac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}$ vs. $\underline{H} = \dfrac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{x}} = \dfrac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A} \equiv \underline{H}}$$

• přímé porovnání modelů $\Rightarrow$ explicitní model $\boxed{\underline{B} = -\underline{I}}$

$\Rightarrow$ explicitní model v $\underline{l}$ je pouze zvláštním případem modelu implicitního pro $\underline{B} = -\underline{I}$

- explicitní modely jsou zvláštním případem modelu implicitního

ŘEŠITELNOST MATEMATICKÉHO MODELU

- příklad : model explicitní v $\underline{l}$: $\underline{l} = \underline{H}\,\underline{x} + \underline{w}$
- možné situace :

a) $u = n$ tj. $\dim(\underline{x}) = \dim(\underline{l})$

$$\underline{x} = \underline{H}^{-1}(\underline{l} - \underline{w})$$ ... unikátní řešení

b) $u < n$: přeurčený model - žádné řešení

nutná úprava modelu (relaxace) - vyrovnání

c) $u > n$: podurčený model - nekonečně mnoho řešení → nutný výběr