KONCEPT METRICKÉHO PROSTORU

- pro výběr "optimálního" řešení je vhodné definovat vzdálenost :

vzdálenost mezi dvěma elementy a, b - axiomy :

a) $\rho(a,b) \geq 0$, $\rho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

b) $\rho(a,b) = \rho(b,a)$

c) $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b)$

- norma : $\|a\| = \rho(a,0)$

$$\|a-b\| = \rho(a,b)$$

- v našem případě se jedná o prostory $\mathcal{X}$, Λ, $\mathcal{F}$ a jejich elementy $\underline{x}$ a $\underline{\ell}$

METRIKA PROSTORU - ORTONORMÁLNÍ BÁZE

- nejčastější volba : Euklidova metrika
- v prostoru o rozměru n jsou elementy a, b vektory

$$\rho(\underline{a},\underline{b}) = \sqrt{(\underline{a}-\underline{b})^T(\underline{a}-\underline{b})} = \sqrt{\sum_i (a_i - b_i)^2}$$

střední kvadratická vzdálenost v ortonormální bázi

- další používané metriky :
  - Čebyšova metrika $\rho(\underline{a},\underline{b}) = \max\limits_{i=1\dots n} |a_i - b_i|$
  - q - metrika $\rho(\underline{a},\underline{b}) = \sqrt[q]{\sum_i |a_i - b_i|^q}$

když $q = 2$ => kvadratická metrika

KVADRATICKÁ METRIKA V OBECNÉ BÁZI

- kvadratická vzdálenost mezi vektory $\underline{a}, \underline{b}$:

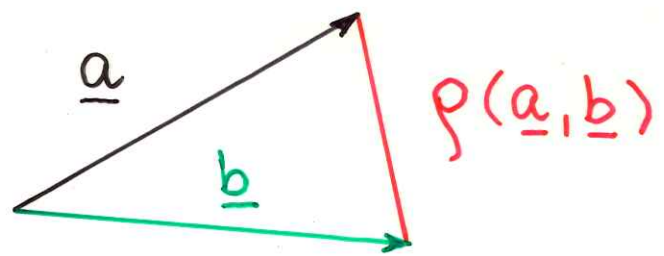
$$\rho^2(\underline{a}, \underline{b}) = \| \underline{a} - \underline{b} \|^2 = (\underline{a} - \underline{b})^T \underline{C}^{-1} (\underline{a} - \underline{b})$$

kde $\underline{C}^{-1}$ je metrický tensor $(n \times n)$ daného prostoru

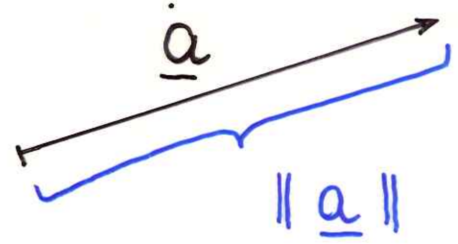
- diagonální členy : čtverce měřítek jednotlivých os
- mimodiagonální členy : pootočení mezi souřadnicovými osami
  - a) ortogonální báze : osy kolmé $\Rightarrow$ $\underline{C}^{-1}$ je diagonální
  - b) ortonormální báze : stejné měřítko $\Rightarrow$ $\underline{C}^{-1}$ je jednotková
- obecně $\underline{C}^{-1}$ je symetrická positivně - definitní matice
- v problému vyrovnání : metrický tensor - stochastický model

VZDÁLENOST A NORMA – GEOMETRICKÝ VÝZNAM

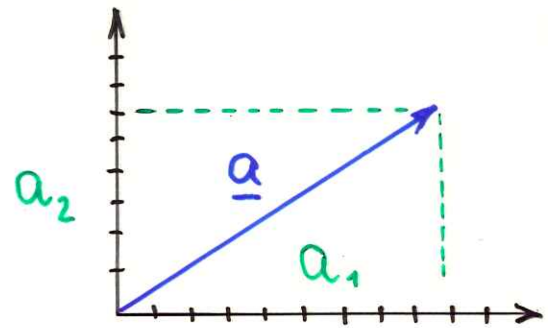
- Euklidova vzdálenost



- norma

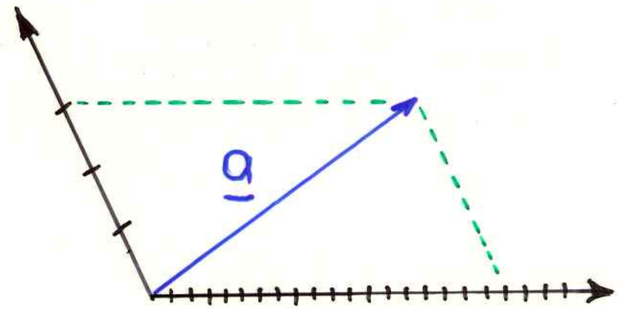


- ortonormální báze



$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\underline{a}^T \underline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

- obecná báze



$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\underline{a}^T \underline{C}^{-1} \underline{a}}$$

RELAXACE PŘEURČENÉHO MATEMATICKÉHO MODELU

- implicitní model $\underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) = \underline{o}$
- vlivem měřických chyb vznikne systém nekonzistentních rovnic
  $\Rightarrow$ žádné řešení $\Rightarrow$ nutná úprava modelu – relaxace
- relaxace = zavedení nových parametrů – vektor oprav $\underline{r}$

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) \rightarrow \underline{f}(\underline{x}, \underline{l} + \underline{r}) = \underline{o} \qquad \underline{r} \in \Lambda$$

- nový počet neznámých je $u + n$ tj. vektory $\underline{x}$ a $\underline{r}$
- přírodní redundance $n - u > 0 \longrightarrow n - (u + n) < 0$
- odhad řešení $\underline{\hat{x}}$ (a $\underline{\hat{r}}$) za podmínky

$$\min \rho(\underline{r}, \underline{o}) = \min \|\underline{r}\|$$

MNČ !

DIFERENCIÁLNÍ FORMA IMPLICITNÍHO MODELU

- implicitní model $\underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) = \underline{o}$

  relaxace $\underline{f}[\underline{x}, E(\underline{l})] = \underline{f}[\underline{x}, \underline{l} + E(\underline{r})]$

  • poznámka : $E(\underline{r}) = \underline{o} \Rightarrow E(\underline{l}) = \underline{l}$

- linearizace modelu :

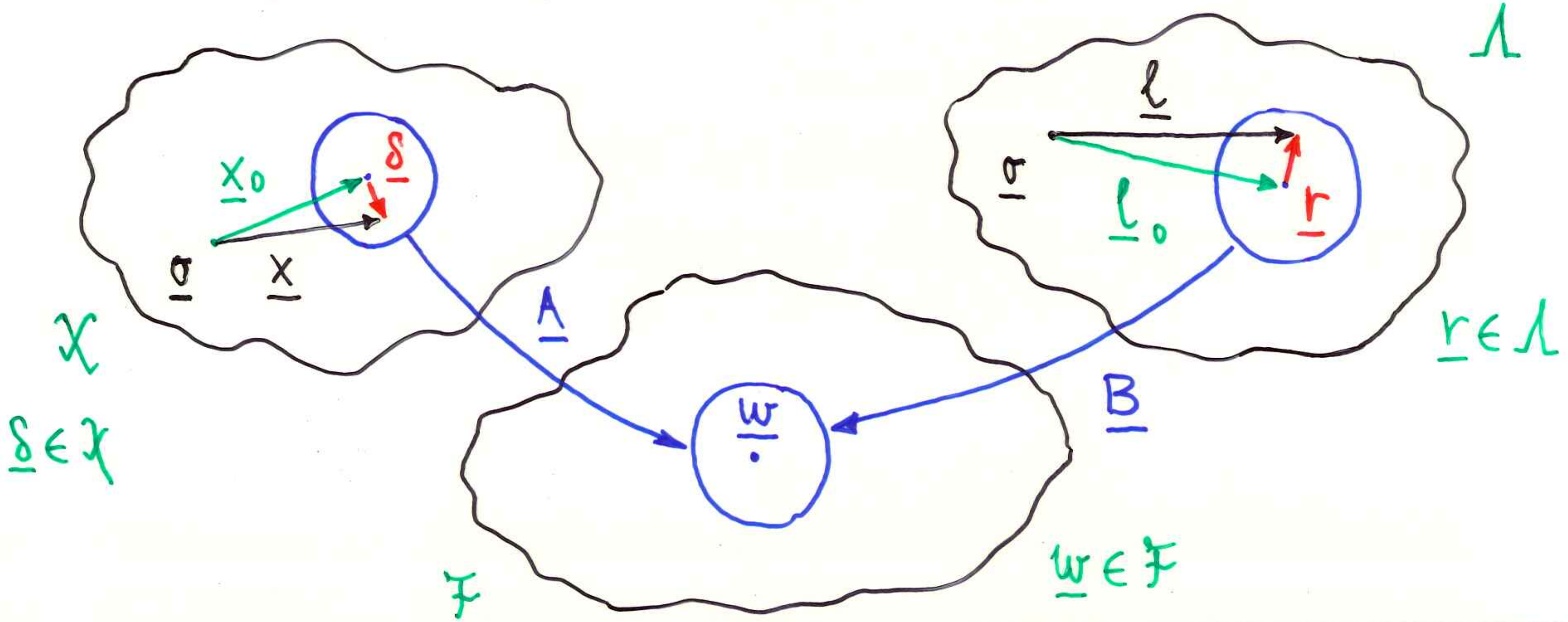
$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{l}) = \underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{\delta}, \underline{l}_0 + \underline{r}) = \underline{o}$$

$$= \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{l}_0) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}\right|_{\substack{\underline{x} = \underline{x}_0 \\ \underline{l} = \underline{l}_0}} (\underline{x} - \underline{x}_0) + \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{l}}\right|_{\substack{\underline{x} = \underline{x}_0 \\ \underline{l} = \underline{l}_0}} (\underline{l} - \underline{l}_0)$$

$$\boxed{\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{r} + \underline{w} = \underline{o}}$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ RELAXOVANÉHO MODELU

- lineární rovnice $\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{r} + \underline{w} = \underline{0}$ platí pouze v blízké oblasti kolem $\underline{x}_0$ a $\underline{l}_0$
- matice plánu (design matrix) $\underline{A}$, $\underline{B}$ a vektor $\underline{w}$ jsou známy
- vektory $\underline{\delta}$ a $\underline{r}$ jsou neznámé - určované



ODVOZENÍ ŘEŠENÍ MNČ 1.

- hledáme řešení $\hat{\underline{x}} = \underline{x}_0 + \hat{\underline{\delta}}$ za podmínky $\min\limits_{\underline{r} \in \Lambda} \|\underline{r}\|^2$

$$\|\underline{r}\|^2 = \underline{r}^T \underline{C}_r^{-1} \underline{r} = \underline{r}^T \underline{C}_r \underline{r} + 2\underline{k}^T (\underline{A}\underline{\delta} + \underline{B}\underline{r} + \underline{w}) = \phi$$

- hledáme minimum variační funkce ϕ s vektorem korelát $\underline{k}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial \underline{r}} &= \hat{\underline{r}}^T \underline{C}_r^{-1} + \hat{\underline{k}}\underline{B} = \underline{0} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\delta}} &= \hat{\underline{k}}^T \underline{A} = \underline{0} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial \underline{k}} &= \underline{A}\hat{\underline{\delta}} + \underline{B}\hat{\underline{r}} + \underline{w} = \underline{0} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{systém} \\ \text{normálních rovnic} \\ \text{- řešení pro} \\ \hat{\underline{r}}, \hat{\underline{\delta}}, \hat{\underline{k}} \end{array}$$

- stříška indikuje MNČ odhady skutečných hodnot $\underline{r}, \underline{\delta}, \underline{k}$

ODVOZENÍ ŘEŠENÍ MNČ 2.

- normální rovnice v zápisu hypermatic a hypervektorů :

$$\begin{bmatrix} \underline{C}_r^{-1} & \underline{B}^T & \underline{0} \\ \underline{B} & \underline{0} & \underline{A} \\ \underline{0} & \underline{A}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{r}} \\ \hat{\underline{k}} \\ \hat{\underline{\delta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{o} \\ \underline{w} \\ \underline{o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{o} \\ \underline{o} \\ \underline{o} \end{bmatrix}$$

- eliminace vektoru $\hat{\underline{r}}$:

$$\begin{bmatrix} -\underline{B}\,\underline{C}_r\underline{B}^T & \underline{A} \\ A^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{k}} \\ \hat{\underline{\delta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{o} \\ \underline{o} \end{bmatrix}$$

- eliminace vektoru $\hat{\underline{k}}$:

$$\left[\underline{A}^T(\underline{B}\,\underline{C}_r\underline{B}^T)^{-1}\underline{A}\right]\hat{\underline{\delta}} + \underline{A}^T(\underline{B}\,\underline{C}_r\underline{B}^T)^{-1}\underline{w} = \underline{o}$$

ODVOZENÍ ŘEŠENÍ MNČ 3.

- řešení má tvar $\boxed{\hat{\underline{\delta}} = -\underbrace{[\underline{A}^T(\underline{B}\underline{C}_r\underline{B}^T)^{-1}\underline{A}]}_{\underline{N}}{}^{-1}\underbrace{\underline{A}^T(\underline{B}\underline{C}_r\underline{B}^T)^{-1}\underline{w}}_{\underline{u}}}$

- zkrácení $\hat{\underline{\delta}} = -\underline{N}^{-1}\underline{u}$ a $\hat{\underline{X}} = \underline{X}_0 + \hat{\underline{\delta}}$

- řešení vektoru oprav $\boxed{\hat{\underline{r}} = -\underline{C}_r\underline{B}^T(\underline{B}\underline{C}_r\underline{B}^T)^{-1}(\underline{A}\hat{\underline{\delta}} + \underline{w})}$

  a celkově $\hat{\underline{l}} = \underline{l}_0 + \hat{\underline{r}}$ ... MNČ odhad měřených hodnot

- vliv nelinearity modelu -> nutnost iterací, n-tý krok:

$$\underline{A}_n(\hat{\underline{X}}_{n+1} - \hat{\underline{X}}_n) + \underline{B}_n(\hat{\underline{l}}_{n+1} - \hat{\underline{l}}_n) + \underline{f}(\hat{\underline{X}}_n, \hat{\underline{l}}_n) = \underline{0}$$

  - řešíme pro $|\hat{\underline{\delta}}_{n+1} - \hat{\underline{\delta}}_n| < \varepsilon$

ŘEŠENÍ MNČ - STOCHASTICKÁ ČÁST 1.

- deterministická část $\underline{l} \rightarrow \underline{\hat{x}}$ $(\underline{r} \rightarrow \underline{\hat{\delta}})$ hotova
- zbývá vyřešit $\underline{C}_l \rightarrow \underline{C}_{\hat{x}}$ ... propagace chyb

$$\underline{\hat{x}} = \underline{x}_0 + \underline{\hat{\delta}} = \underline{x}_0 - \underbrace{[\underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{C}_r \underline{B}^T)^{-1} \underline{A}]}_{\underline{N}}{}^{-1} \underline{A}^T \underbrace{(\underline{B}\,\underline{C}_r \underline{B}^T)^{-1}}_{\underline{M}} \underline{w}$$

$$\underline{\hat{x}} = \underline{x}_0 - \underline{N}^{-1} \underline{A}^T \underline{M}\,\underline{w}$$

- aplikace kovariančního zákona :

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{x}} = (-\underline{N}^{-1}\underline{A}^T\underline{M})\,\underline{M}^{-1}(-\underline{N}^{-1}\underline{A}^T\underline{M})^T = (\underline{A}^T\underline{M}\,\underline{A})^{-1} = \underline{N}^{-1}}$$

neboť $\underline{C}_w = \underline{B}\,\underline{C}_r \underline{B}^T = \underline{M}^{-1}$ a $\underline{C}_r = \underline{C}_l$

tohle bude problém!

ŘEŠENÍ MNČ - STOCHASTICKÁ ČÁST 2.

- řešení pro $\underline{\delta}$: $\quad \hat{\underline{\delta}} = - \underline{N}^{-1} \underline{u}$

- řešení pro $\underline{r}$: $\quad \hat{\underline{r}} = - \underline{C}_r \underline{B}^T \underline{M} (\underline{A} \hat{\underline{\delta}} + \underline{w})$

- dosazením $\hat{\underline{\delta}}$ do $\hat{\underline{r}}$:

$$\hat{\underline{r}} = \underline{C}_r \underline{B}^T \underbrace{(\underline{M} \underline{A} \underline{N}^{-1} \underline{A}^T \underline{M} - \underline{M})}_{\underline{L}} \underline{w} = - \underline{C}_r \underline{B}^T \underline{L} \underline{w}$$

- aplikace kovariančního zákona : $\underline{L}$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{C}_{\hat{r}} &= \underline{C}_r \underline{B}^T \underline{L} \underline{C}_w (\underline{C}_r \underline{B}^T \underline{L})^T = \underline{C}_r \underline{B}^T \underline{L} \underline{B} \underline{C}_r = \\ &= \underline{C}_r \underline{B}^T \underline{M} [\underline{I} - \underline{A} (\underline{A}^T \underline{M} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{M}] \underline{B} \underline{C}_r \end{aligned}}$$

- matice $\underline{C}_{\hat{r}}$ je vždy singulární a používá se především pro testování odlehlých měření a jejich detekci

ŘEŠENÍ MNČ - STOCHASTICKÁ ČÁST 3.

- vyrovnaná měření $\underline{\hat{l}} = \underline{l} + \underline{\hat{r}} = \underline{l} - \underline{C}_r \underline{B}^T \underline{M} (\underline{A}\,\underline{\hat{\delta}} + \underline{w})$
- substituce za $\underline{\hat{\delta}} = -\underline{N}^{-1}\underline{u}$ a $\underline{w} = \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{l}_0)$:

$$\underline{\hat{l}} = \underline{l} - \underline{C}_r \underline{B}^T \underline{L}\, \underline{f}(\underline{x}_0, \underline{l}_0)$$

- aplikace kovariančního zákona :

$$\underline{C}_{\hat{l}} = \frac{\partial \underline{\hat{l}}}{\partial \underline{l}}\, \underline{C}_l \left(\frac{\partial \underline{\hat{l}}}{\partial \underline{l}} \right)^T , \quad \frac{\partial \underline{\hat{l}}}{\partial \underline{l}} = I - \underline{C}_r \underline{B}^T \underline{L}\, \underline{B}$$

- dosazením dostaneme

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{l}} = \underline{C}_r - \underbrace{\underline{C}_r \underline{B}^T \underline{L}\, \underline{B}\, \underline{C}_r}_{\underline{C}_{\hat{r}}} = \underline{C}_r - \underline{C}_{\hat{r}} = \underline{C}_l - \underline{C}_{\hat{r}}}$$

interpretace ?

ŘEŠENÍ MNČ – MODEL EXPLICITNÍ V $\underline{\ell}$

- model $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{\ell} \longrightarrow \underline{f}(\underline{x}) = \underline{\ell} + \underline{r}$
- linearizace : $\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w} = \underline{r}$
- řešení za podmínky $\min\limits_{\underline{r} \in \Lambda} \|\underline{r}\|^2 = \min\, (\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w})^T \underline{C}_r^{-1} (\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w})$
- normální rovnice $\dfrac{\partial}{\partial \underline{\delta}} \left[(\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w})^T \underline{C}_r^{-1} (\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{w}) \right] = \underline{o}$

  a řešením je $\hat{\underline{\delta}} = \underline{-(\underline{A}^T \underline{C}_r^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_r^{-1} \underline{w}} = -\underline{N}^{-1} \underline{u}$
- v případě lineárního modelu $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{\ell} + \underline{r}$ je řešením

$$\underline{\hat{\underline{x}} = (\underline{A}^T \underline{C}_r^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{C}_r^{-1} \underline{\ell}}$$

alternativa ?

MNČ - VOLBA MATICE $\underline{C}_e$ ($\underline{C}_r$)

- struktura matice $\underline{C}_e$ je často neznámá, především elementy mimo hlavní diagonálu a také měřítko
- často se používá ve tvaru $\underline{P}_e = \sigma_0^2 \underline{C}_e^{-1}$

  kde σ_0^2 je tzv. referenční (jednotková) variance

  - pozor: σ_0^2 je bezrozměrný měřítkový faktor!
- není-li známa její hodnota, volí se $\sigma_0^2 = 1$ - následky?
- triviální volba matice $\underline{P}_e = \underline{\underline{I}}$ - následky?
- volbu variance σ_0^2 lze ověřit na základě určených parametrů $\underline{\hat{x}}$ a $\underline{\hat{r}}$ - možnost opravy

KONTROLA VOLBY REFERENČNÍ VARIANCE

- vyjdeme z kvadratické formy

$$\underline{\hat{r}}^T \underline{C}_r^{-1} \underline{\hat{r}} = - \underline{\hat{\delta}}^T \underline{N}\, \underline{\hat{\delta}} + \underline{w}^T \underline{M}\, \underline{w}$$

- aplikace expektace

$$E\left(\hat{\sigma}_0^{-2}\, \underline{\hat{r}}^T \underline{P}_\ell\, \underline{\hat{r}} \right) = \underbrace{E\left(- \underline{\hat{\delta}}^T \underline{N}\, \underline{\hat{\delta}} \right)}_{-u-\xi} + \underbrace{E\left(\underline{w}^T \underline{M}\, \underline{w} \right)}_{m+\xi} \qquad \xi \in R$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\underline{\hat{r}}^T \underline{P}_\ell\, \underline{\hat{r}}}{m-u}} \quad , \quad m-u \ \ldots$$

stupeň volnosti modelu (redundance)

- důsledky : $\quad \hat{C}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2\, \underline{C}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2\, \underline{N}^{-1}$

$$\underline{\hat{C}}_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2\, \underline{C}_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2\, \underline{P}_\ell^{-1} \underline{B}^T \underline{L}\, \underline{B}\, \underline{P}_\ell^{-1} \quad , \quad \underline{\hat{C}}_{\hat{\ell}} = \underline{C}_r - \underline{\hat{C}}_{\hat{r}}$$

ŘEŠENÍ MNČ - SHRNUTÍ

- sestavení matice $\underline{C}_\ell = \underline{C}_r = \hat{\sigma}_0^2\, \underline{P}_\ell^{-1}$
- řešení $\hat{\underline{\delta}} = -\left[\underline{A}^T (\underline{B}\,\underline{P}_\ell^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{A}\right]^{-1}\underline{A}^T(\underline{B}\,\underline{P}_\ell^{-1}\underline{B}^T)^{-1}\underline{w}$

$$\hat{\underline{r}} = -\underline{P}_\ell^{-1}\underline{B}^T(\underline{B}\,\underline{P}_\ell^{-1}\underline{B}^T)^{-1}(\underline{A}\hat{\underline{\delta}} + \underline{w})$$

a celkově: $\hat{\underline{x}} = \underline{x}_0 + \hat{\underline{\delta}}$, $\hat{\underline{\ell}} = \underline{\ell} + \hat{\underline{r}}$

deterministická část

- určení referenční variance $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\hat{\underline{r}}^T \underline{P}_\ell \hat{\underline{r}}}{m-n}$
- výpočet kovariančních matic:

$$\hat{\underline{C}}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2\left[\underline{A}^T(\underline{B}\,\underline{C}_\ell\,\underline{B}^T)^{-1}\underline{A}\right]^{-1}$$

$$\hat{\underline{C}}_{\hat{r}} = \hat{\sigma}_0^2\,\underline{P}_\ell^{-1}\underline{B}^T\underline{L}\,\underline{B}\,\underline{P}_\ell^{-1}$$

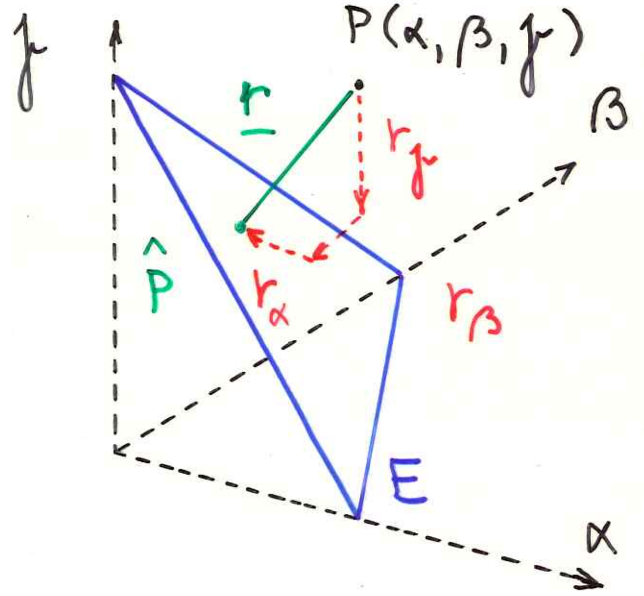
stochastická část

MNČ – GEOMETRICKÝ VÝZNAM

- příklad : vnitřní ∢ v Δ : $\alpha + \beta + \gamma - \pi = 0$ (*)

  α, β, γ ... měřeny (stejná přesnost) $\Rightarrow$ $\alpha + \beta + \gamma - \pi \neq 0$

- podmínka (*) v souřadnicovém systému $\{\alpha, \beta, \gamma)$ – rovina E



- měřené hodnoty : bod $P(\alpha, \beta, \gamma)$
- vektor oprav $\underline{r} = (r_\alpha, r_\beta, r_\gamma)$
- MNČ : bod $\hat{P}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$
- vektor oprav $\underline{r} \perp E$!
- v tomto případě $r_\alpha = r_\beta = r_\gamma = \frac{1}{3}(\alpha + \beta - \gamma - \pi)$

• název normální rovnice : $\underline{\hat{r}} \perp (\underline{A}\,\underline{x} - \underline{\ell})$