TESTOVÁNÍ ŘEŠENÝCH PARAMETRŮ 1/2

- testování vektoru $\underline{\hat{x}}$: míra důvěry ve vyřešené hodnoty ?
- koncept pravděpodobnosti + funkce rozdělení pravděpodobnosti :

$$\phi_{\underline{x}} = n(\underline{x}, \underline{\mu}_x, \underline{C}_x) = (2\pi)^{-\frac{u}{2}} (\det \underline{C}_x)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu}_x)^T \underline{C}_x^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}_x)\right]$$

• realita : $\underline{\mu}_x$ nahrazeno $\underline{\hat{x}}$, $\underline{C}_x$ nahrazeno $\underline{C}_{\hat{x}}$ (nebo $\underline{\hat{C}}_{\hat{x}}$)

$$\boxed{\phi_{\underline{x}} = n(\underline{x}, \underline{\hat{x}}, \underline{C}_{\hat{x}}) = (2\pi)^{-\frac{u}{2}} (\det \underline{C}_{\hat{x}})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\hat{x}})^T \underline{C}_{\hat{x}}^{-1} (\underline{x} - \underline{\hat{x}})\right]}$$

- hledaná míra důvěry v hodnoty ve vektoru $\underline{\hat{x}}$ lze získat pomocí u-rozměrné integrace funkce $\phi_{\underline{x}}$ v okolí $\underline{\hat{x}}$

TESTOVÁNÍ ŘEŠENÝCH PARAMETRŮ 2/2

- dvě možnosti : známe či neznáme σ_0^2

a) parametr σ_0^2 je znám $\Rightarrow$ matice $\underline{C}_{\hat{x}}$ je použitelná

statistika $y = (\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \underline{C}_{\hat{x}}^{-1} (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) \quad \dots \quad \phi_y = \chi^2(u)$

test : $y < \xi_{\chi^2(u),\, 1-\alpha} \quad \dots$ u-dimenzionální hyperelipsoid

b) parametr σ_0^2 je neznám $\Rightarrow$ nutno použít matici $\hat{\underline{C}}_{\hat{x}}$

statistika $y = \frac{1}{u} (\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T \hat{\underline{C}}_{\hat{x}}^{-1} (\underline{x} - \hat{\underline{x}}) \quad \dots \quad \phi_y = F(u, m-u)$

test : $y < \xi_{F(u, m-u),\, 1-\alpha} \quad \dots$ stejná interpretace

TESTOVÁNÍ ČÁSTI VEKTORU ŘEŠENÝCH PARAMETRŮ

- často se testují pouze části vektoru $\underline{\hat{x}}$ ... označme $\underline{\hat{x}}_k$:

$$pr\left[(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k)^T \underline{C}^{-1}_{\hat{x}_k} (\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k) \leq \xi_{\chi^2(k),1-\alpha} \right] = 1-\alpha$$

- kde $\dim(\underline{x}_k) = k \leq u$ ... rozměr vektoru $\underline{x}_k$

- simultání pravděpodobnost N různých částí vektoru $\hat{x}$:

$$pr\left[\bigcap_{k=1}^{N} (\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k)^T \underline{C}^{-1}_{\hat{x}_k} (\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k) \leq \xi_{\chi^2(k),1-\alpha} \right] = 1-N\alpha$$

$\Rightarrow$ pro zachování hladiny pravděpodobnosti na hodnotě $1-\alpha$

je nutné upravit limit $\xi_{\chi^2(k),1-\alpha} \longrightarrow \xi_{\chi^2(k),1-\frac{\alpha}{N}}$

ZHODNOCENÍ 3D SÍTĚ 1/2

- vyrovnáním geodetické sítě získáme matici $\underline{C}_{\hat{x}}$ (nebo $\hat{\underline{C}}_{\hat{x}}$)
- v této matici lze nalézt (3×3) matici odpovídající bodu P_i :

a) jsou-li body sítě určeny relativně ke zvolenému počátku P_0, elipsoid pravděpodobnosti odvozený z matice $\underline{C}_{P_i}$ znázorňuje míru nejistoty relativní polohy bodu P_i vzhledem k počátku P_0

b) při vyrovnání sítě s využitím vnitřních podmínek znázorňuje elipsoid pravděpodobnosti taktéž vzhledem k centroidu sítě; stopa matice $\underline{C}_{\hat{x}}$ je v tomto případě minimální

ZHODNOCENÍ 3D SÍTĚ 2/2

- elipsoid pravděpodobnosti (absolutní) bodu P_i definován

$$\sigma_0^2 : \frac{1}{2} \left(\underline{x}_{P_i} - \hat{\underline{x}}_{P_i} \right)^T \underline{C}_{\hat{P}_i} \left(\underline{x}_{P_i} - \hat{x}_{P_i} \right) \leq \xi_{\chi^2(3),\, 1-\alpha}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 : \frac{1}{2} \left(\underline{x}_{P_i} - \hat{x}_{P_i} \right)^T \hat{\underline{C}}_{\hat{P}_i} \left(\underline{x}_{P_i} - \hat{x}_{P_i} \right) \leq 3\, \xi_{F(3,\, m-3N),\, 1-\alpha}$$

- při uvážení existence všech N bodů v síti :

  změna hladiny pravděpodobnosti z $1-\alpha$ na $1-\frac{\alpha}{N}$

- při $N = 50$ a velkém počtu měřených parametrů m

  je elipsoid pravděpodobnosti zhruba 1,5 x větší při uvážení všech bodů sítě než pro jednotlivé body

ZHODNOCENÍ 2D SÍTĚ

- stejné vztahy jako u 3D : elipsoid $\rightarrow$ elipsa
- limitní hodnoty dány

a) σ_0^2 známo : $\xi_{\chi^2(2),\,1-\alpha}$ resp. $\xi_{\chi^2(2),\,1-\frac{\alpha}{N}}$

b) σ_0^2 neznámo : $2\xi_{F(2,\,m-2N),\,1-\alpha}$ resp. $2\xi_{F(2,\,m-2N),\,1-\frac{\alpha}{N}}$

- absolutní elipsy pravděpodobnosti rostou se vzdáleností od počátku sítě $\Rightarrow$ jsou málo použitelné $\Rightarrow$ lépe použít relativní elipsy pravděpodobnosti mezi dvěma body sítě

ABSOLUTNÍ ELIPSA PRAVDĚPODOBNOSTI 1/2

- rovnice elipsy pravděpodobnosti bodu P : $\underline{x} + \underline{C}_x$

$$\underline{x} = [\, x \quad y \,]^T , \quad \underline{C}_x = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} ,$$

$$\phi(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \underline{C}_x}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu}_x)^T \underline{C}_x^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}_x) \right]$$

- rovnice elipsy je dána argumentem exponenciální funkce :

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2 \sigma_{xy} \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] = k^2$$

- při volbě $k^2 = 1$ ... standardní elipsa

ABSOLUTNÍ ELIPSA PRAVDĚPODOBNOSTI 2/2

- posun počátku pro $\mu_x = \mu_y = 0$:

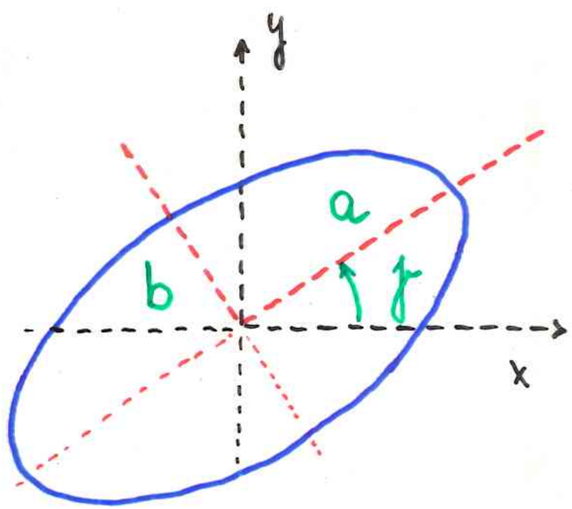
$$\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\,\frac{x}{\sigma_x}\,\frac{y}{\sigma_y} + \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2 = 1-\rho^2$$

- parametry elipsy :

$$a = \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2-\sigma_y^2)^2 + \sigma_{xy}^2}\right)$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2-\sigma_y^2)^2 + \sigma_{xy}^2}\right)$$

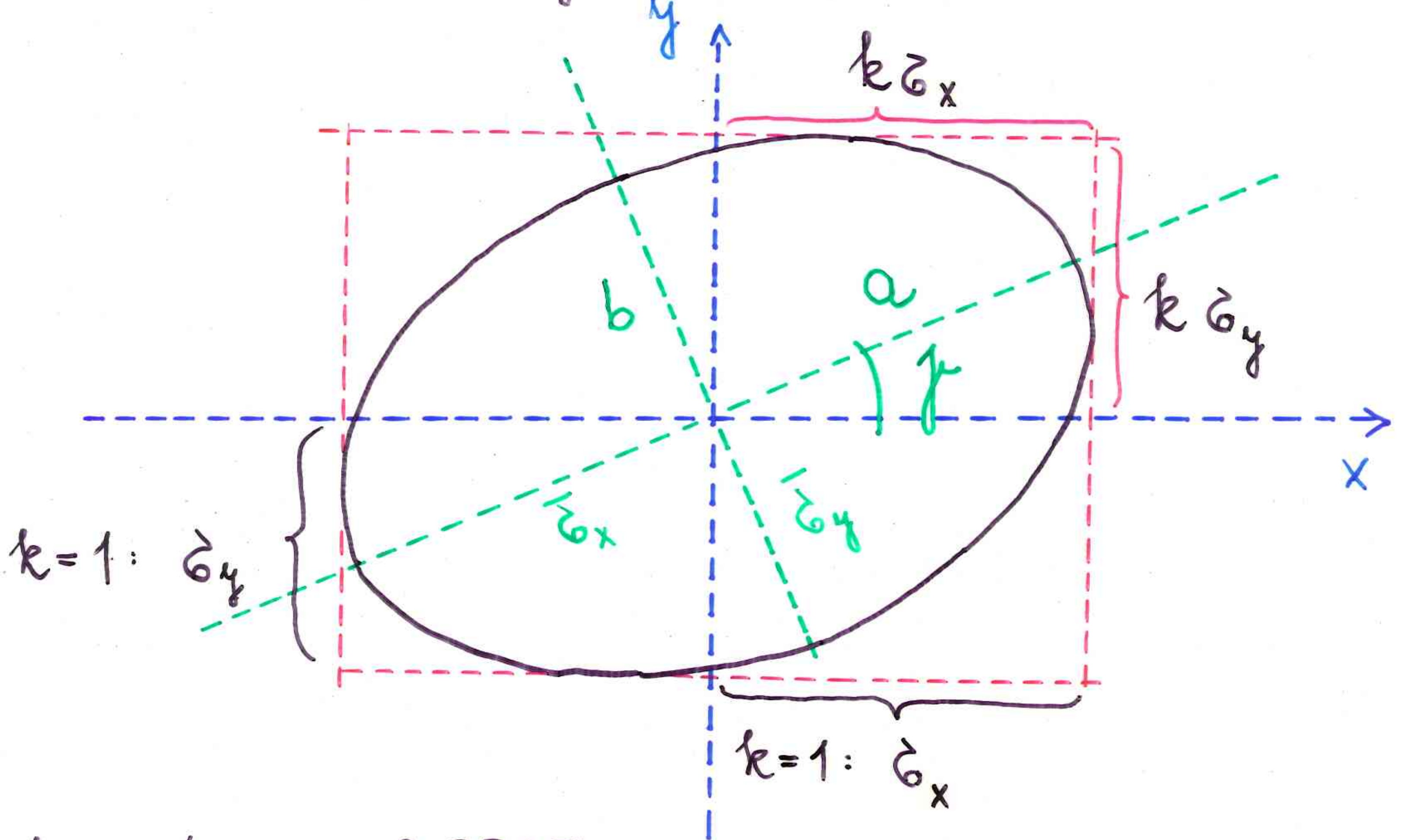
$$\gamma = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}\right)$$



- elipsy pravděpodobnosti : $\chi^2 \rightarrow \xi_{1-\alpha}$ či $\xi_{1-\frac{\alpha}{N}}$

STANDARDNÍ ELIPSA PRAVDĚPODOBNOSTI

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\sigma_{xy}\frac{xy}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1-\rho^2 \qquad (k^2 = 1)$$



$k = 1 \Rightarrow 1-\alpha = 0{,}3935$

DALŠÍ ELIPSY PRAVDĚPODOBNOSTI

- pro $k = 1$: $pr\{y < \chi^2(2), 1-\alpha = k\} \Rightarrow 1-\alpha = 0{,}3935$
- pro $1-\alpha = 0{,}95$: $pr\{y < \{\chi^2(2); 0{,}95\}\} \Rightarrow k = \sqrt{5{,}99} = 2{,}447$
- elipsa pravděpodobnosti pro $1-\alpha = 95\,\%$:

$$a = 2{,}447\,\bar{\sigma}_x \qquad b = 2{,}447\,\bar{\sigma}_y$$

$\Rightarrow$ poloosy elipsy je nutné zhruba $2{,}5\times$ zvětšit

- elipsa pro $1-\alpha = 99\,\%$ – poloosy zhruba $3\times$ větší
- elipsy pro síť N bodů $\Rightarrow$ $1-\frac{\alpha}{N}$ $\Rightarrow$ větší elipsy

RELATIVNÍ ELIPSA PRAVDĚPODOBNOSTI

- dva body sítě : $P_i \dots \underline{x}_i \ , \ P_j \dots \underline{x}_j$
- vektor mezi body $\Delta\underline{x}_{ij} = \underline{x}_j - \underline{x}_i = \underline{G} \begin{bmatrix} \underline{x}_i \\ \hline \underline{x}_j \end{bmatrix}$
- kovarianční zákon :

$$\boxed{\underline{C}_{\Delta x_{ij}} = \underline{G}\,\underline{C}_{ij}\,\underline{G}^T \ ,}$$

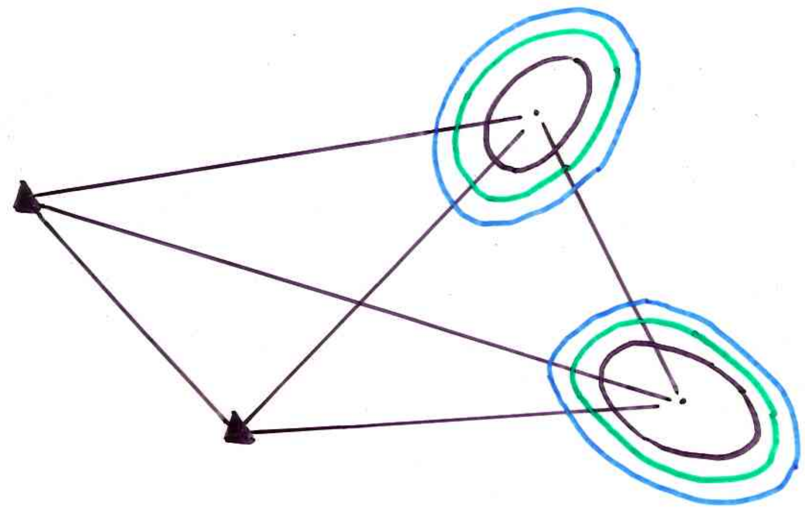
kde $\underline{C}_{ij} = \left[\begin{array}{c:c} \underline{C}_{x_i} & \underline{C}_{x_i x_j} \\ \hdashline \underline{C}_{x_j x_i} & \underline{C}_{x_j} \end{array}\right]$ hypermatice

$\dim(\underline{C}_{ij}) = (4 \times 4)$

$$\Rightarrow \underline{C}_{\Delta x_{ij}} = \underline{C}_{x_i} + \underline{C}_{x_j} - \underline{C}_{x_i x_j} - \underline{C}_{x_j x_i}$$

ABSOLUTNÍ A RELATIVNÍ ELIPSY PRAVDĚPODOBNOSTI

- příklad absolutních elips :

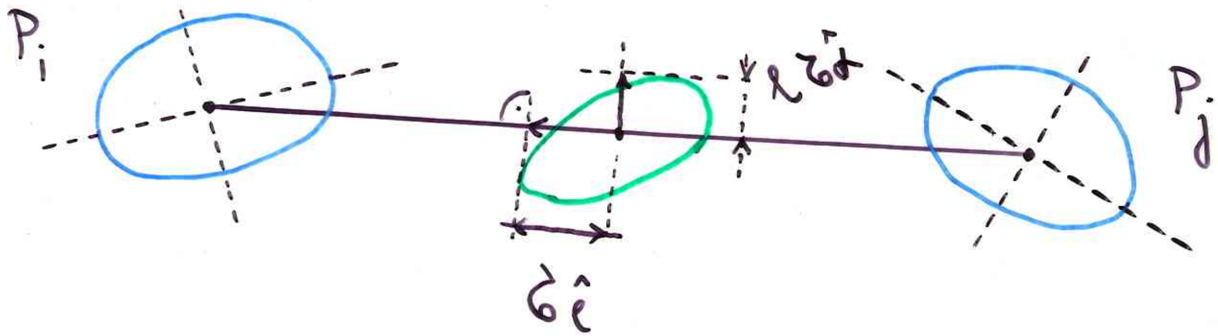


$1-\alpha = 0,3935$

$1-\alpha = 0,95$

$1-\frac{\alpha}{N} = 1-\frac{\alpha}{2}$

- relativní vs. absolutní elipsa : ... $\sigma_{\hat{e}}$, $\sigma_{\hat{\alpha}}$



ZHODNOCENÍ 1D SÍTĚ

- v tomto případě hovoříme o <u>intervalech pravděpodobnosti</u>

$$|H_i - \hat{H}_i| \leq \sqrt{\xi_{1-\alpha}}\ \sigma_{\hat{H}_i} ,$$

kde $\hat{H}_i$ a $\sigma_{\hat{H}_i}$ jsou MNČ řešením pro výšku bodu P_i a její směrodatné odchylky

- opět je možno rozlišit :

- σ_0^2 je známo $\longrightarrow$ $\xi_{\chi^2(1),1-\alpha}$ resp. $\xi_{\chi^2(1),1-\frac{\alpha}{N}}$
- σ_0^2 je neznámo $\longrightarrow$ $\xi_{F(1,m-u),1-\alpha}$ resp. $\xi_{F(1,m-u),1-\frac{\alpha}{N}}$

PLÁNOVÁNÍ PRO DOSAŽENÍ OPTIMÁLNÍ PŘESNOSTI

- účel : sestavení modelu a určení nezbytné a dostatečné přesnosti měřených dat pro dosažení optimální přesnosti řešení
- plánování může být provedeno před vlastním měřením → výhoda!
- tři základní možnosti plánování :

a) dány kovarianční matice $\underline{C}_{\hat{x}}$ a $\underline{C}_{e}$ – určit matice plánu $\underline{A}$ ($\underline{B}$)

b) dány matice $\underline{C}_{\hat{x}}$ a $\underline{A}$ (či také $\underline{B}$) – určit matici $\underline{C}_{e}$

c) dána matice $\underline{C}_{\hat{x}}$ – určit matice $\underline{A}$ (a $\underline{B}$) a $\underline{C}_{e}$

- dva možné přístupy řešení : přímá metoda a zkusmo

PŘÍKLAD NÁVRHU PLÁNU

- problém ad b) : dány matice $\underline{C}_{\hat{x}}$ a $\underline{A}$, řeší se matice $\underline{C}_{l}$

a) přímá metoda : kovarianční zákon $\underline{C}_{\hat{l}} = \underline{A}\,\underline{C}_{\hat{x}}\,\underline{A}^T$

a následně iteračně $\underline{C}_{l} - \underline{C}_{l}\,\underline{L}\,\underline{C}_{l} = \underline{A}\,\underline{C}_{\hat{x}}\,A^T$

b) metoda zkusmo : zkouší se různé matice $\underline{A}$ a $\underline{C}_{l}$

(zvlášť či současně) až se dosáhne požadované $\underline{C}_{\hat{x}}$,

v našem případě se zvolí $\underline{C}^{0}_{l}$ a určí se $\underline{C}^{0}_{\hat{x}} = (\underline{A}^T \underline{C}^{0\,-1}_{l} A)^{-1}$

- celý postup se opakuje až $\underline{C}^{t}_{\hat{x}}$ (po t iteracích) odpovídá požadované $\underline{C}_{\hat{x}}$ (současně lze také měnit matici $\underline{A}$)

ÚLOHY S APRIORNÍMI ZNALOSTMI O ŘEŠENÝCH PARAMETRECH

- zpravidla existují apriorní informace o řešených parametrech $\underline{x}$:
  možný odhad na základě nutného počtu měření
- <u>dvě možnosti volby matice $\underline{C}_x$</u> : subjektivní vs. objektivní

- důležité : znalost $\sigma_{0,e}^2$ a $\sigma_{0,x}^2$

  a) $\sigma_{0,e}^2$ a $\sigma_{0,x}^2$ jsou známy

  b) $\sigma_{0,e}^2$ a $\sigma_{0,x}^2$ jsou neznámy, ale stejné $(\sigma_{0,e}^2 = \sigma_{0,x}^2)$

  c) jedna z hodnot $\sigma_{0,e}^2$ a $\sigma_{0,x}^2$ není známa

  d) $\sigma_{0,e}^2$ a $\sigma_{0,x}^2$ nejsou známy a jsou různé $(\sigma_{0,e}^2 \neq \sigma_{0,x}^2)$

ŘEŠENÍ MODELU S APRIORNÍMI ZNALOSTMI 1/2

- matematický model $\underline{f}(\underline{l}') = \underline{o}$, kde $\underline{l}' = [\, \underline{l}^T \,\vdots\, x_0^T \,]^T$

• <u>řešení ve formě</u> $\underline{B}'\underline{r}' = \underline{o}$, kde $\underline{B}' = [\, \underline{B} \,\vdots\, \underline{A} \,]$

$$\underline{r}' = [\, \underline{r}^T \,\vdots\, \underline{\delta}^T \,]$$

• <u>kovarianční matice</u> $\underline{C}_{r'} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{C}_l & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{C}_x \end{array}\right]$

za předpokladu $\underline{C}_{lx} = \underline{0}$

- konkrétní řešení je možno odvodit pro 4 případy a) - d)

viz. další průsvitka

ŘEŠENÍ MODELU S APRIORNÍMI ZNALOSTMI 2/2

ad a) $\underline{\hat{\delta}} = -(\underline{N} + \underline{C}_x^{-1})^{-1} \underline{A}^T \underline{M}\, \underline{w}$, $\underline{C}_{\hat{x}} = (\underline{N} + \underline{C}_x^{-1})^{-1}$

b) $\underline{\hat{\delta}} = -(\underline{\tilde{N}} + \underline{C}_x^{-1})^{-1} \underline{A}^T \underline{\tilde{M}}\, \underline{w}$, $\underline{C}_{\hat{x}} = (\underline{\tilde{N}} + \underline{C}_x^{-1})^{-1}$

c) $\underline{\hat{\delta}} = -(\hat{\sigma}_{0,e}^{-2} \underline{\tilde{N}} + \underline{C}_x^{-1})^{-1} \hat{\sigma}_{0,e}^{-2} \underline{A}^T \underline{\tilde{M}}\, \underline{w}$, $\underline{\hat{C}}_{\hat{x}} = (\hat{\sigma}_{0,e}^{-2} \underline{\tilde{N}} + \underline{C}_x^{-1})^{-1}$

d) $\underline{\hat{\delta}} = -(\hat{\sigma}_{0,e}^{-2} \underline{\tilde{N}} + \hat{\sigma}_{0,x}^{-2} \underline{C}_{\hat{x}}^{-1})^{-1} \hat{\sigma}_{0,e}^{-2} \underline{A}^T \underline{\tilde{M}}\, \underline{w}$, $\underline{\hat{C}}_{\hat{x}} = (\hat{\sigma}_{0,e}^{-2} \underline{\tilde{N}} + \hat{\sigma}_{0,x}^{-2} \underline{C}_x^{-1})^{-1}$

kde $\underline{N} = (\underline{A}^T \underline{C}_e^{-1} \underline{A})^{-1}$, $\underline{M} = (\underline{B}\, \underline{C}_e \underline{B}^T)^{-1}$

a $\underline{\tilde{N}}$, $\underline{\tilde{M}}$ ... forma matic $\underline{N}$ a $\underline{M}$ při neznámé $\hat{\sigma}_{0,e}^2$

- Srovnání s MNČ : $\underline{\hat{\delta}} = -\underline{\tilde{N}}\, \underline{A}^T \underline{\tilde{M}}\, \underline{w}$, $\underline{\hat{C}}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_{0,x}^2\, \underline{\tilde{N}}^{-1}$

ÚLOHY S PODMÍNKAMI 1/2

- více informací o řešených parametrech než je možno obsáhnout matematickým modelem → další model:

$$\boxed{\underline{f}(\underline{l}, \underline{x}) = \underline{0}, \quad \underline{f}_c(\underline{x}) = \underline{0}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{f} \ldots \text{hlavní model}: & \dim \underline{f} = n \\ \underline{f}_c \ldots \text{model podmínky}: & \dim \underline{f}_c = n_c \end{array}\right\} n_c \leq n$$

- dva typy podmínek:

a) absolutní ... matematické či fyzikální zákony

b) váhové ... formulace na základě měření

ÚLOHY S PODMÍNKAMI 2/2

- linearizace matematických modelů :

$$\left.\begin{aligned} \underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{r} + \underline{w} &= \underline{o} \\ \underline{D}\,\underline{\delta} + \underline{w}_c &= \underline{o} \end{aligned}\right\} \text{ dimenze } = m + m_c$$

- řešení pro $\underline{\delta}$: variační funkce

$$\boxed{\phi = \underline{r}^T \underline{C}_r^{-1} \underline{r} + 2\underline{k}^T (\underline{A}\,\underline{\delta} + \underline{B}\,\underline{r} + \underline{w}) + 2\underline{k}_c^T (\underline{D}\,\underline{\delta} + \underline{w}_c)}$$

- řešení pro podmínku $\min\limits_{\underline{r},\,\underline{\delta}} \phi(\underline{r}, \underline{\delta}) \Rightarrow \hat{\underline{\delta}}, \hat{\underline{r}}$

- koreláty $\underline{k}$, $\underline{k}_c$

ŘEŠENÍ MODELU S PODMÍNKAMI

- min ϕ $\rightarrow$ odvození normálních rovnic :

$$\begin{bmatrix} \underline{N} & \underline{D}^T \\ \underline{D} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{\delta}} \\ \hat{\underline{k}}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{w}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{o} \\ \underline{o} \end{bmatrix}$$

- eliminací : $\underline{N}\,\hat{\underline{\delta}} + \underline{D}^T \hat{\underline{k}}_c + \underline{u} = \underline{o}$

$$\boxed{\hat{\underline{\delta}} = -\underline{N}^{-1}\underline{u} \underbrace{- \underline{N}^{-1}\underline{D}^T \left(\underline{D}\,\underline{N}^{-1}\underline{D}^T\right)^{-1}\left(\underline{w}_c - \underline{D}\,\underline{N}^{-1}\underline{u}\right)}_{\text{vliv modelu s podmínkou}}}$$

- zpětnou substitucí je možno odvodit $\hat{\underline{r}}$ — zvlášť pro $\underline{f}$ a $\underline{f}_c$ / kombinace

KOVARIANČNÍ MATICE ŘEŠENÍ MODELU S PODMÍNKAMI

- řešení modelu s podmínkou lze přepsat do tvaru

$$\underline{\hat{\delta}} = -\left[\underline{N}^{-1} - \underline{N}^{-1}\underline{D}^T(\underline{D}\underline{N}^{-1}\underline{D}^T)^{-1}\underline{D}N^{-1} \right] \underline{u} + \text{konst.}$$

- aplikací kovariančního zákona :

$$\boxed{\underline{C}_{\hat{\delta}} = \underline{N}^{-1} - \underbrace{\underline{N}^{-1}\underline{D}^T(\underline{D}\underline{N}^{-1}\underline{D}^T)\underline{D}\underline{N}^{-1}}_{\text{vliv modelu s podmínkou}}}$$

- řešení modelu s podmínkami :
  - počítat $\underline{\hat{\delta}}$ přímo kombinací modelů $\underline{f}$ a $\underline{f}_c$
  - počítat řešení pro $\underline{\hat{\delta}}$ z modelu $\underline{f}$ a opravu z $\underline{f}_c$

ÚLOHY SE SINGULARITAMI

- singulární matematické modely ($\det \underline{N} = 0$) :
  - špatně formulovaný matematický model
  - málo či nevhodná měření, příliš mnoho neznámých
- možná detekce problému : defekt matice $\underline{A}$ (či $\underline{N}$)

hodnost $\underline{A}$ = hodnost $\underline{N}$ $< \underline{u}$ $\Rightarrow$ singularita

- numerické problémy i v případě, že $\det \underline{N} \neq 0$,

ale $\det \underline{N} \to 0$ … špatně podmíněné úlohy

(léčba ? $\to$ úprava modelu - regularizace)

ŘEŠENÍ ÚLOHY SE SINGULARITAMI 1/2

- defekt matice $\underline{N}$: $\operatorname{def} \underline{N} = u - \text{hodnost } \underline{N} = u - d$

$\Rightarrow$ model má nekonečně mnoho řešení :

a) prvních $(u-d)$ neznámých určeno jako funkce dalších d nezn.

b) všechny neznámé určeny jako funkce d neznámých

c) zavedení dodatečných podmínek :

např.

$$\left.\begin{aligned} \underline{A} &\rightarrow [\,\underline{A} \;\vdots\; \underline{D}\,]^T \\ \underline{N} &\rightarrow \begin{bmatrix} \underline{N} & \underline{D}^T \\ \underline{D} & \underline{0} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \text{hodnost} \geq u$$

ŘEŠENÍ ÚLOHY SE SINGULARITAMI 2/2

- úloha pro hodnost $[\underline{A} \,\vdots\, \underline{D}]^T = \text{hod}\,\underline{A} + \text{hod}\,\underline{D} = (u-d)+d$

-> minimálně podmíněná úloha s vnitřní podmínkou

$$\underline{A}\,\underline{D}^T = \underline{0}$$

- řešení úlohy

$$\begin{bmatrix} \hat{\underline{\delta}} \\ \hat{\underline{k}}_c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{N} & \underline{D}^T \\ \underline{D} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{w}_c \end{bmatrix}$$

- eliminací :

$$\hat{\underline{\delta}} = - \underbrace{\left[\underline{N} + \underline{k}\,\underline{D}^T (\underline{D}\,\underline{D}^T)^{-1} \underline{D} \right]^{-1} \left[\underline{I} - \underline{D}^T (\underline{D}\,\underline{D}^T)^{-1} \underline{D} \right]}_{\underline{C}_{\hat{\delta}}} \underline{u}$$